

# Álgebra Local

Pedro Sancho de Salas

2001



# Índice General

<b>1</b>	<b>Completación</b>	<b>5</b>
1.1	Introducción . . . . .	5
1.2	Anillos noetherianos. Variedades algebraicas. Repaso . . . . .	5
1.3	Límites inductivos y proyectivos . . . . .	14
1.4	Completación . . . . .	19
1.4.1	Ejemplos de completaciones y graduados . . . . .	22
1.4.2	Topología $I$ -ádica. Completación $I$ -ádica . . . . .	24
1.4.3	Artin-Rees . . . . .	24
1.4.4	Completación y noetherianidad . . . . .	27
1.4.5	Teorema de Cohen . . . . .	28
1.5	Problemas . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Teoría de la dimensión local</b>	<b>35</b>
2.1	Introducción . . . . .	35
2.2	Longitud de un módulo . . . . .	35
2.3	Función de Hilbert . . . . .	38
2.4	Dimensión en anillos locales noetherianos . . . . .	39
2.5	Teoría de la dimensión en variedades algebraicas . . . . .	42
2.6	Problemas . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Anillos locales regulares</b>	<b>47</b>
3.1	Introducción . . . . .	47
3.2	Anillos locales regulares . . . . .	47
3.3	Anillos locales regulares de dimensión 1 y anillos de valoración . . . . .	50
3.4	Cierre entero y anillos de valoración . . . . .	51
3.5	Finitud del cierre entero . . . . .	54
3.6	Problemas . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Desingularización de curvas</b>	<b>59</b>
4.1	Introducción . . . . .	59
4.2	Espectro proyectivo . . . . .	59
4.3	Explosión en un punto y desingularización . . . . .	63
4.4	Multiplicidad de un punto singular . . . . .	66
4.5	Multiplicidad de intersección . . . . .	68
4.6	Teoremas de Bézout y Max Noether . . . . .	69
4.7	Ramas analíticas . . . . .	72

4.7.1	Polígono de Newton . . . . .	73
4.8	Puntos cuspidales y contacto maximal . . . . .	73
4.8.1	Desingularización de curvas planas vía el contacto maximal . . . . .	74
4.9	Problemas . . . . .	77
<b>Índice de términos</b>		<b>80</b>

**Bibliografía:**

1. M. Atiyah, I.G. Macdonald: *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Ed. Reverté, Barcelona (1973).
2. W. Fulton: *Curvas Algebraicas*, Ed. Reverté, Barcelona (1971).
3. H. Matsumura: *Commutative Algebra*, W.A. Benjamin Co, New York (1970).
4. J.A. Navarro: *Álgebra Conmutativa Básica*, Manuales UNEX, n§ 19, (1996).
5. R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, GTM n§ 52, Springer Verlag (1977).

# Capítulo 1

## Completación

### 1.1 Introducción

Vamos a iniciar el estudio local, en un entorno de un punto, de las variedades algebraicas. Es decir, del estudio del anillo local de los gérmenes de las funciones algebraicas de una variedad en un punto.

En las siguientes secciones abordamos la completación de un anillo en un punto. Esta técnica consiste en tomar los desarrollos de Taylor de las funciones en el punto. Así, el proceso de completación puede entenderse como una aproximación algebraico-analítica al estudio de las variedades. El completado del anillo de funciones algebraicas de una variedad en un punto reflejará las propiedades locales de la variedad en el punto. Si bien el proceso de completación es más drástico que el de localización. Por ejemplo, los anillos locales de una recta afín y los de una cúbica plana sin puntos singulares no son isomorfos pues no lo son sus cuerpos de funciones, sin embargo, los completados de sus anillos locales sí son isomorfos (sobre un cuerpo algebraicamente cerrado).

Demostraremos, mediante Artin-Rees, que el morfismo de completación  $A \rightarrow \hat{A}$  es plano. La estructura de  $\hat{A}$  es más sencilla que la de  $A$ . Así, gracias a la platitud del morfismo de completación, muchos problemas se pueden simplificar estudiándolos en  $\hat{A}$ .

Nuestros objetivos serán demostrar las propiedades de exactitud de la completación, que la completación de un anillo noetheriano es noetheriano, que el morfismo de completación es plano y el teorema de Cohen. El teorema de Cohen es un teorema de estructura de los anillos completos. Afirma que, en general, la completación de un anillo local noetheriano es un cociente de un anillo de series formales, como sucede con los anillos de funciones de las variedades algebraicas.

### 1.2 Anillos noetherianos. Variedades algebraicas. Repaso

En Geometría Algebraica los espacios estudiados son objetos definidos por un número finito de ecuaciones (la finitud es una condición natural). Es decir, los ideales que se consideran son los generados por un número finito de funciones. Los anillos cuyos ideales son finito generados se denominan noetherianos. Como veremos los anillos que usualmente aparecen en Geometría Algebraica y la Aritmética son noetherianos, de forma que estos anillos proporcionan el marco natural para desarrollar su estudio.

Será natural comenzar estudiando los módulos finito generados, cuyos submódulos sean finito generados, en vez de limitarnos simplemente a los anillos cuyos ideales son finito generados. Las operaciones básicas como producto tensorial, cocientes etc., se realizan de un modo mucho más flexible

y claro con los módulos, y muchos de los objetos usuales en Matemáticas tienen estructura de módulo.

**Definición 1.2.1.** <sup>1</sup> Un  $A$ -módulo  $M$  se dice que es un  $A$ -módulo noetheriano si todo submódulo suyo (propio o no) es finito generado.

**Definición 1.2.2.** <sup>2</sup> Un  $A$ -módulo  $M$  se dice que es noetheriano si toda cadena ascendente de submódulos de  $M$

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

estabiliza, es decir existe  $m \gg 0$  de modo que  $M_m = M_{m+1} = \cdots$ .

**Proposición 1.2.3.** *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

*Demostración.* **def<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  def<sup>2</sup>:** Sea una cadena ascendente de submódulos de  $M$ ,  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$ .

Sea  $M' = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subseteq M$ . Como  $M'$  es un submódulo de  $M$ , es finito generado. Escribamos  $M' = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ , con  $m_j \in M_{i_j}$ . Sea  $m$  el máximo de todos los  $i_j$ . Entonces trivialmente se obtiene que  $M' = M_m$ , luego  $M_m = M_{m+1} = \cdots$ .

**def<sup>2</sup>  $\Rightarrow$  def<sup>1</sup>:** Sea  $M' \subseteq M$ . Sea  $m_1 \in M'$  y consideremos el submódulo de  $M$ ,  $M_1 = \langle m_1 \rangle$ . Si  $M_1 \neq M'$ , sea  $m_2 \in M' - M_1$ . Consideremos el submódulo de  $M$ ,  $M_2 = \langle m_1, m_2 \rangle$ . Repitiendo el proceso, obtenemos una cadena de inclusiones estrictas

$$\langle m_1 \rangle \subset \langle m_1, m_2 \rangle \subset \cdots$$

que ha de ser finita, porque por la segunda definición toda cadena estabiliza. Por tanto, existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\langle m_1, \dots, m_m \rangle = M'$ . □

**Ejemplo 1.2.4.** Los  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita son  $k$ -módulos noetherianos.

**Proposición 1.2.5.** *Todo submódulo de un módulo noetheriano es noetheriano.*

**Proposición 1.2.6.** *Todo cociente de un módulo noetheriano es noetheriano.*

*Demostración.* Sea  $M$  noetheriano y  $\pi: M \rightarrow M/N$  un cociente. Dado un submódulo  $\bar{M} \subset M/N$ , tenemos que  $\pi^{-1}\bar{M} = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$ . Por tanto,  $\bar{M} = \langle \pi(m_1), \dots, \pi(m_r) \rangle$ . □

**Proposición 1.2.7.** *Sea*

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \rightarrow 0$$

*una sucesión exacta de  $A$ -módulos. Se verifica que  $M_2$  es noetheriano  $\Leftrightarrow M_1$  y  $M_3$  son noetherianos.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Esto es lo que afirman las dos proposiciones anteriores.

$\Leftarrow$ ) Sea  $M' \subseteq M_2$ . El diagrama siguiente es conmutativo y las filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \cap M_1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \pi(M') \longrightarrow 0 \\ & & \cap & & \cap & & \cap \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\pi} & M_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Tenemos que  $M' \cap M_1 = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$  y que  $\pi(M') = \langle \pi(m_1), \dots, \pi(m_r) \rangle$ . Por tanto, tenemos la igualdad  $M' = \langle m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s \rangle$ . □

**Ejercicio 1.2.8.** Probar que  $M$  y  $M'$  son noetherianos si y sólo si  $M \oplus M'$  es noetheriano.

**Definición 1.2.9.** Se dice que un anillo es noetheriano si como  $A$ -módulo es noetheriano, es decir si todo ideal es finito generado, o equivalentemente, si toda cadena ascendente de ideales estabiliza.

**Ejemplo 1.2.10.** Los cuerpos, los anillos de ideales principales, como  $\mathbb{Z}$ ,  $k[x]$ , son noetherianos.

Un ejemplo de anillo no noetheriano, es el anillo de funciones diferenciales en la recta real:

Sea  $I_n$  el ideal de las funciones que se anulan en  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$  es una cadena ascendente estricta de ideales en el anillo, luego no estabiliza. Por tanto, el anillo no es noetheriano.

**Corolario 1.2.11.** Si  $A$  es noetheriano entonces todo  $A$ -módulo finito generado es noetheriano.

*Demostración.* Si  $A$  es noetheriano  $A^n$  es un  $A$ -módulo noetheriano, por el ejercicio que sigue a la proposición 1.2.7. Ahora bien, como todo módulo finito generado es cociente de un libre finito generado, concluimos que los módulos finitos son noetherianos. □

Por tanto, sobre los dominios de ideales principales todo módulo finito generado es noetheriano.

**Ejercicio 1.2.12.** Si  $A$  es noetheriano  $A_S$  es noetheriano

**Ejercicio 1.2.13.** Demostrar que  $\mathbb{Q}[x, x_1, \dots, x_n, \dots] / ((x - n)x_n)_{\{n \in \mathbb{N}\}}$  es localmente noetheriano pero no es noetheriano.

**Proposición 1.2.14.** Si  $A$  es un anillo noetheriano, entonces  $\text{Spec } A$  es un espacio topológico noetheriano. (Un espacio topológico se dice que es noetheriano si toda cadena descendente de cerrados estabiliza).

*Demostración.* Sea  $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$  una cadena descendente de cerrados. Sean  $I_i$  los ideales de funciones que se anulan en  $C_i$ . Luego  $(I_i)_0 = C_i$  y tenemos la cadena

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

Cadena que estabiliza por ser  $A$  noetheriano. Es decir, existe  $m \in \mathbb{N}$  de modo que  $I_m = I_{m+1} = \dots$ . Luego,  $C_m = C_{m+1} = \dots$ . □

**Ejercicio 1.2.15.** Demostrar

1. Todo espacio topológico noetheriano es compacto.
2. Todo abierto de un espacio topológico noetheriano es noetheriano.
3. Llamemos cerrado irreducible a todo cerrado que no es unión de dos cerrados propios. Todo espacio topológico noetheriano es unión de un número finito de cerrados irreducibles.

**Ejercicio 1.2.16.** Probar que en un anillo noetheriano el número de ideales primos minimales es finito.

**Definición 1.2.17.** Un morfismo de anillos  $f: A \rightarrow B$  se dice que es finito si  $B$  es un  $A$ -módulo finito, con la estructura natural de  $A$ -módulo que define  $f$  en  $B$  ( $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} f(a) \cdot b$ ). En este caso, también se dice que  $B$  es una  $A$ -álgebra finita.

**Ejemplo 1.2.18.**  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  es un morfismo finito.

**Proposición 1.2.19.** *La composición de morfismos finitos es finito.*

*Demostración.* Sean  $A \xrightarrow{\text{finito}} B \xrightarrow{\text{finito}} C$ . Es decir,  $B = Ab_1 + \dots + Ab_n$  y  $C = Bc_1 + \dots + Bc_m$ . Luego,

$$C = (Ab_1 + \dots + Ab_n)c_1 + \dots + (Ab_1 + \dots + Ab_n)c_m = \sum_{i=1, j=1}^{n, m} Ab_i c_j$$

En conclusión,  $A \rightarrow C$  es un morfismo finito. □

**Proposición 1.2.20.** *Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo finito y  $A \rightarrow C$  un morfismo de anillos. Se verifica que  $C = A \otimes_A C \rightarrow B \otimes_A C$  es un morfismo finito.*

**Corolario 1.2.21.** *Si  $A \rightarrow B$  es un morfismo finito entonces  $A_S \rightarrow B_S$  y  $A/I \rightarrow B/I \cdot B$  son morfismos finitos*

**Definición 1.2.22.** Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Se dice que  $b \in B$  es entero sobre  $A$  si verifica una relación del tipo

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad \text{con } a_i \in A$$

**Proposición 1.2.23.** *Sean  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos y  $b \in B$ . Denotemos  $A[b] = \{p(b) \in B, \text{ para } p(x) \in A[x]\}$ . El morfismo  $A \rightarrow A[b]$  es finito  $\Leftrightarrow b$  es entero sobre  $A$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $b_1, \dots, b_n$  un sistema generador del  $A$ -módulo  $A[b]$ . Consideremos el endomorfismo de  $A$ -módulos

$$\begin{aligned} A[b] &\xrightarrow{\cdot b} A[b] \\ c &\longmapsto c \cdot b \end{aligned}$$

Sea  $(a_{ij})$  una matriz asociada  $\cdot b$  en el sistema generador  $b_1, \dots, b_n$ . Sea  $p_c(x) = |(a_{ij} - x \cdot \text{Id}) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , con  $a_i \in A$ . Se verifica que  $p_c(\cdot b) = 0$ , luego  $p_c(b) = p_c(\cdot b)(1) = 0$  y  $b$  es entero sobre  $A$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , con  $a_i \in A$ , tal que  $p(b) = 0$ . El epimorfismo  $A[x]/(p(x)) \rightarrow A[b]$ ,  $q(\bar{x}) \mapsto q(b)$  está bien definido. Por tanto, sólo tenemos que demostrar que  $A[x]/(p(x))$  es un  $A$ -módulo finito generado.

Veamos que  $\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1}$  es un sistema generador de  $A[x]/(p(x))$  (de hecho, es una base):

$$\begin{aligned} \bar{x}^n &= -(a_1 \bar{x}^{n-1} + \dots + a_n) \in \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1} \rangle \\ \bar{x}^{n+1} &= -(a_1 \bar{x}^n + \dots + a_n \bar{x}) \in \langle \bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^n \rangle \subseteq \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1} \rangle \\ &\dots \end{aligned}$$

□

**Observación:** Para la demostración de  $\Rightarrow$ ) sólo es necesario suponer que  $A[b]$  está incluido en una  $A$ -álgebra finita.

**Definición 1.2.24.** Dada una extensión de cuerpos  $k \rightarrow K$  y  $\alpha \in K$ , decimos que  $\alpha$  es algebraico sobre  $k$ , si es entero sobre  $k$ , que equivale a decir que  $\alpha$  es raíz de un polinomio con coeficientes en  $k$ .

**Ejemplo 1.2.25.** Si  $\alpha$  es una raíz  $n$ -ésima de la unidad, entonces  $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$  es un morfismo finito.

**Ejemplo 1.2.26.** El morfismo  $\text{Spec } k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \rightarrow \text{Spec } k[x]$  definido por  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$  es un morfismo finito.

**Proposición 1.2.27.** Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. El conjunto de elementos de  $B$  enteros sobre  $A$  forman una  $A$ -subálgebra de  $B$ .

*Demostración.* Sean  $b_1, b_2 \in B$  enteros sobre  $A$ . Tenemos que  $A \rightarrow A[b_1]$  es un morfismo finito, y  $A[b_1] \rightarrow A[b_1, b_2]$  es un morfismo finito porque si  $b_2$  verifica una relación entera con coeficientes en  $A$ , en particular la verifica con coeficientes en  $A[b_1]$ . Por tanto, por la proposición 1.2.19  $A \rightarrow A[b_1, b_2]$  es un morfismo finito. Luego, por la observación anterior, todo elemento  $p(b_1, b_2) \in A[b_1, b_2] \in B$ , con  $p(x, y) \in A[x, y]$ , es entero sobre  $A$ . Hemos concluido.  $\square$

**Lema 1.2.28.** Sea  $k$  un cuerpo. Las  $k$ -álgebras finitas íntegras son cuerpos.

*Demostración.* Sea  $A$  una  $k$ -álgebra finita íntegra. Dado  $a \in A$  no nula, la homotecia  $A \xrightarrow{a} A$ ,  $b \mapsto b \cdot a$  es inyectivo por la integridad de  $A$ . Por tanto, por dimensiones, es isomorfismo. Luego  $a$  es invertible y  $A$  es cuerpo.  $\square$

**Lema 1.2.29.** Sea  $k$  un cuerpo. El espectro de una  $k$ -álgebra finita es un número finito de puntos cerrados.

*Demostración.* Las  $k$ -álgebras finitas son anillos noetherianos luego tienen un número finito de ideales primos minimales. Si hacemos cociente por un ideal primo minimal obtenemos una  $k$ -álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo por el lema anterior. Por tanto, los ideales primos minimales son maximales y hemos concluido.  $\square$

**Corolario 1.2.30.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra finita y  $\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Spec } A$ . Se cumple que el morfismo natural

$$A \rightarrow A_{x_1} \times \cdots \times A_{x_n}$$

es un isomorfismo. Luego toda  $k$ -álgebra finita es un producto de un número finito de  $k$ -álgebras finitas locales.

*Demostración.* Para probar que un morfismo es isomorfismo basta verlo localmente.  $(A_{x_1} \times \cdots \times A_{x_n})_{x_i} = A_{x_i}$  porque  $(A_{x_j})_{x_i} = 0$  si  $i \neq j$  y  $(A_{x_i})_{x_i} = A_{x_i}$ . Se concluye inmediatamente.  $\square$

**Lema 1.2.31.** Si  $f: A \hookrightarrow B$  es un morfismo finito e inyectivo, entonces el morfismo inducido  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es epiyectivo.

*Demostración.* Dado  $x \in \text{Spec } A$ , el morfismo  $A_x \rightarrow B_x$  es finito e inyectivo. Por Nakayama,  $\mathfrak{p}_x B_x \neq B_x$ , luego  $\text{Spec } B_x/\mathfrak{p}_x B_x \neq \emptyset$ . Es decir, la fibra de  $x$  es no vacía, luego  $f^*$  es epiyectivo.  $\square$

**Definición 1.2.32.** Llamaremos dimensión de Krull de un anillo  $A$  al supremo de las longitudes de la cadena de ideales primos de  $A$ , o equivalentemente al supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de  $\text{Spec } A$ . Denotaremos a la dimensión (de Krull) de  $A$  por  $\dim A$ .

**Ejercicio 1.2.33.** Demostrar que la dimensión de Krull de  $\mathbb{C}[x, y]$  es dos.

**Teorema 1.2.34.** Si  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo finito entonces el morfismo inducido  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es una aplicación cerrada de fibras de dimensión cero y finitas.

*Demostración.* Sea  $C = (J)_0$  un cerrado de  $\text{Spec } B$ . Debemos demostrar que  $f^*(C)$  es un cerrado de  $\text{Spec } A$ . Consideremos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/J \cap A & \longrightarrow & B/J \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Spec } A & \xleftarrow{f^*} & \text{Spec } B \\ \uparrow & & \uparrow \\ (J \cap A)_0 = \text{Spec } A/J \cap A & \xleftarrow{f^*|_C} & \text{Spec } B/J = C \end{array}$$

Basta ver que  $f^*|_C$  es epiyectiva. Ahora bien, como  $A/J \cap A \hookrightarrow B/J$  es un morfismo finito inyectivo, por el lema anterior concluimos que  $f^*|_C$  es epiyectiva.

La fibra de un punto  $x \in \text{Spec } A$  es  $f^{*-1}(x) = \text{Spec } B_x/\mathfrak{p}_x B_x$ . Observemos que si  $f^{*-1}(x) \neq \emptyset$  entonces  $B_x/\mathfrak{p}_x B_x$  es una  $A_x/\mathfrak{p}_x$ -álgebra finita. Concluimos por el lema 1.2.29  $\square$

**Ejercicio 1.2.35.** Probar que la inclusión natural  $k[x] \hookrightarrow k[x, y]/(xy - 1)$  no es un morfismo finito.

**Teorema 1.2.36 (del ascenso).** Sea  $f: A \rightarrow B$  un morfismo finito. Sean  $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'} \subset A$  y  $\mathfrak{p}_y \subset B$  ideales primos, de modo que  $f^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$ . Existe un ideal primo  $\mathfrak{p}_{y'} \subset B$ , de modo que  $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$  y  $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$ .

*Demostración.* Por el teorema anterior  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es una aplicación cerrada. Por tanto,  $f^*(\bar{y}) = \bar{x}$ . Luego como  $x' \in \bar{x}$ , existe un  $y' \in \bar{y}$  tal que  $f^*(y') = x'$ . Es decir,  $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$  y  $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$ .  $\square$

**Corolario 1.2.37.** Si  $f: A \hookrightarrow B$  es un morfismo finito de modo que  $f^*: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  es epiyectivo (por ejemplo, si  $f$  es inyectivo) entonces  $\dim A = \dim B$ .

*Demostración.* Dada una cadena estricta de cerrados irreducibles  $\bar{y}_1 \subset \bar{y}_2 \subset \dots \subset \bar{y}_n$  de  $\text{Spec } B$ ,  $f^*(\bar{y}_1) \subset f^*(\bar{y}_2) \subset \dots \subset f^*(\bar{y}_n)$  es una cadena de cerrados irreducibles estricta de  $\text{Spec } A$ , pues las fibras son de dimensión cero (1.2.34). Por tanto,  $\dim B \leq \dim A$ .

Sea ahora una cadena estricta de cerrados irreducibles  $\bar{x}_1 \subset \bar{x}_2 \subset \dots \subset \bar{x}_n$  de  $\text{Spec } A$ . Sea  $y_n \in \text{Spec } B$ , tal que  $f^*(y_n) = x_n$ . Por el teorema del ascenso, existe  $y_{n-1} \in \bar{y}_n$  tal que  $f^*(y_{n-1}) = x_{n-1}$ . Así sucesivamente, obtendremos una cadena estricta de cerrados irreducibles  $\bar{y}_1 \subset \bar{y}_2 \subset \dots \subset \bar{y}_n$  de  $\text{Spec } B$  (de imagen por  $f^*$ , la cadena de  $\text{Spec } A$ ). Por tanto,  $\dim A \leq \dim B$ , luego  $\dim A = \dim B$ .  $\square$

**Proposición 1.2.38.** Sea  $G$  un grupo finito de automorfismos de un anillo  $B$ . Se verifica que

$$\text{Spec } B^G = (\text{Spec } B)/G$$

donde  $B^G = \{b \in B: g(b) = b, \text{ para todo } b \in B\}$  y  $(\text{Spec } B)/G$  es el espacio topológico cociente de  $\text{Spec } B$  por la relación de equivalencia  $x \sim x'$ , si existe un  $g \in G$  tal que  $x' = gx$  (es decir,  $\mathfrak{p}_{x'} = g(\mathfrak{p}_x)$ ).

En consecuencia, el morfismo natural  $\pi: \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$  es abierto, y el morfismo  $B^G \hookrightarrow B$  cumple el teorema del descenso de ideales: dados dos ideales primos  $\mathfrak{p}_{y'} \subseteq \mathfrak{p}_y \subseteq B^G$ , y un ideal primo  $\mathfrak{p}_x \subseteq B$  tal que  $\mathfrak{p}_x \cap B^G = \mathfrak{p}_y$ , entonces existe un ideal primo  $\mathfrak{p}_{x'} \subseteq \mathfrak{p}_x$  tal que  $\mathfrak{p}_{x'} \cap B^G = \mathfrak{p}_{y'}$ .

*Demostración.* Empecemos observando que dada  $f \in B$ , el polinomio  $\prod_{g \in G} (x - g(f))$  es un polinomio mónico con coeficientes en  $B^G$ . Por tanto,  $B^G \hookrightarrow B^G[f]$  es un morfismo finito. Por tanto,  $B^G \hookrightarrow B$  es un morfismo entero, luego epiyectivo y cerrado en espectros.

Sólo nos falta ver que las fibras del morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$  son órbitas por la acción de  $G$ .

$G$  actúa transitivamente sobre las fibras del morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$ : Obviamente, dado un ideal primo  $\mathfrak{p}_x \subset B$ ,  $g(\mathfrak{p}_x)$  corta a  $B^G$  en el mismo ideal primo que  $\mathfrak{p}_x$ . Es decir,  $G$  actúa en las fibras. Sea  $\mathfrak{p}_x$  es un ideal primo de  $B$  distinto de  $g(\mathfrak{p}_{x'}) \stackrel{\text{Not}}{=} \mathfrak{p}_{g(x')}$  para todo  $g \in G$ . Supongamos que  $x, x'$  tienen la misma imagen por el morfismo  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } B^G$ , digamos  $y$ . Sabemos que  $\mathfrak{p}_x$  no está incluido en ninguno de los  $g(\mathfrak{p}_{x'})$ , luego existe una  $f \in B$  que se anula en  $x$  y no se anula en ninguno de los  $g(x')$ . Entonces  $N(f) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{g \in G} g(f) \in B^G$  se anula en  $x$  y no se anula en ninguno de los  $g(x')$ .

Llegamos a contradicción, porque por un lado  $N(f)$  ha de anularse en  $y$  y por el otro no.

Vayamos con la consecuencia. Sea  $U \subseteq \text{Spec } B$  un abierto. Se cumple que  $V = \bigcup_{g \in G} g(U)$  es un abierto y que  $\pi^{-1}(\pi(U)) = V$ , luego  $\pi(U)$  es un abierto. Por último, sea  $x'' \in \text{Spec } B$  tal que  $\pi(x'') = y'$ . Hemos dicho más arriba que  $\pi$  es un morfismo cerrado, por tanto,  $\pi(\overline{x''}) = \overline{y'}$ . Luego existe  $x_1 \in \overline{x''}$ , tal que  $\pi(x_1) = y$ . Como las fibras de  $\pi$  son órbitas, tenemos que  $x = gx_1$ , para cierto  $g \in G$ . Ahora es fácil ver que  $\pi(gx'') = y'$  y  $x = gx_1 \in \overline{gx''}$ , i.e.,  $\mathfrak{p}_{gx''}$  es el ideal  $\mathfrak{p}_{x'}$  buscado.  $\square$

**Teorema 1.2.39 (Descenso. Cohen-Seidenberg).** *Sea  $A$  un anillo íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$  una extensión finita de cuerpos y  $A'$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma'$ . El morfismo  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$  es abierto y  $A \hookrightarrow A'$  cumple el teorema del descenso de los ideales.*

*Demostración.* Sea  $\Sigma''$  la envolvente normal de  $\Sigma'$ , sobre  $\Sigma$ . Sea  $A''$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma''$ . Observemos los morfismos

$$A \hookrightarrow A' \hookrightarrow A'', \quad \text{Spec } A \leftarrow \text{Spec } A' \leftarrow \text{Spec } A''$$

Los morfismos inyectivos enteros, como los finitos, son epiyectivos en espectros. Por tanto, si  $\text{Spec } A'' \rightarrow \text{Spec } A$  es abierto entonces  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$  es abierto. Igualmente, si  $A \hookrightarrow A''$  cumple el teorema del descenso de ideales, entonces  $A \hookrightarrow A'$  también.

En conclusión, podemos suponer que  $\Sigma \hookrightarrow \Sigma'$  es una extensión normal, digamos de grupo de Galois  $G$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma'^G$ . Es fácil ver que  $\bar{A} = A'^G$ . Por la proposición anterior, se cumple Cohen-Seidenberg para el morfismo  $\bar{A} = A'^G \hookrightarrow A'$ . Para concluir, basta demostrar Cohen-Seidenberg para

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & \bar{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Sigma & \hookrightarrow & \Sigma'^G \end{array}$$

$\Sigma'^G$  es puramente inseparable, sobre  $\Sigma$ , luego para todo  $b \in \Sigma'^G$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $b^{p^n} \in \Sigma$  (donde  $0 < p = \text{car } \Sigma$ ). Por tanto, para todo  $b \in \bar{A}$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $b^{p^n} \in A$  (pues  $b^{p^n}$

es entero sobre  $A$ ). Se concluye, pues ha de verificarse que  $\text{Spec } A = \text{Spec } \bar{A}$ , con las asignaciones

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } A & \xlongequal{\quad} & \text{Spec } \bar{A} \\ \mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathfrak{p}' = \{b \in \bar{A} : b^{p^n} \in \mathfrak{p}\} \\ \mathfrak{p}' \cap A & \longleftarrow & \mathfrak{p}' \end{array}$$

□

**Definición 1.2.40.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra. Diremos que las funciones  $\xi_1, \dots, \xi_n \in A$  son algebraicamente independientes sobre  $k$  cuando el morfismo de  $k$ -álgebras  $k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A, p(x_1, \dots, x_n) \mapsto p(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sea inyectivo; es decir, cuando cualquier relación algebraica  $\sum_{i_1 \dots i_n} a_{i_1 \dots i_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} = 0$ , con coeficientes en  $k$ , tenga todos sus coeficientes nulos.

**Lema 1.2.41 (de normalización de Noether).** *Sea  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito. Supongamos que  $k$  tiene un número infinito de elementos<sup>1</sup>. Existe un morfismo finito inyectivo*

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow A$$

“*Toda variedad algebraica afín se proyecta de modo finito en un espacio afín*”.

*Demostración.* Vamos a hacerlo por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$ , no hay nada que decir ( $k = k$ ). Supongamos que el teorema es cierto hasta  $n - 1$ .

Sea  $r$  el número máximo de  $\{\xi_i\}$  algebraicamente independientes entre sí. Si  $r = n$ , entonces  $k[\xi_1, \dots, \xi_n] = k[x_1, \dots, x_n]$ . Podemos suponer entonces que  $\xi_n$  es algebraico sobre  $k[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}]$ . Luego existe un  $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ , donde la variable  $x_n$  aparece, de modo que  $p(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ .

Escribamos  $p(x_1, \dots, x_n) = p_s(x_1, \dots, x_n) + p_{s-1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + p_0(x_1, \dots, x_n)$  como suma de polinomios  $p_i(x_1, \dots, x_n)$  homogéneos de grado  $i$ . Sean  $x_i = x'_i + \lambda_i x_n$ , entonces

$$\begin{aligned} p(x'_1 + \lambda_1 x_n, \dots, x'_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n) &= p_s(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1)x_n^s + \\ &\text{polinomio en } x'_1, \dots, x'_{n-1}, x_n \text{ de grado en } x_n \text{ menor que } s \end{aligned}$$

Así pues, si eligimos  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in k$  de modo que  $p_s(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$ , tendremos que  $\xi_n$  es entero sobre  $k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}]$ , con  $\xi'_i = \xi_i - \lambda_i \xi_n$ . Por tanto, la composición

$$k[x_1, \dots, x_r] \xrightarrow[\text{Hip.ind.}]{\text{finito}} k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}] \xrightarrow{\text{finito}} k[\xi'_1, \dots, \xi'_{n-1}, \xi_n] = k[\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n]$$

es el morfismo finito buscado. □

**Definición 1.2.42.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra, diremos que  $x \in \text{Spec } A$  es un punto racional si  $A/\mathfrak{p}_x = k$ .

**Proposición 1.2.43.** *Sea  $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$  e  $I = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_m(x_1, \dots, x_n))$ . Se cumple que los puntos racionales de  $\text{Spec } A$  se corresponden biyectivamente con las soluciones del sistema de ecuaciones*

$$p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, p_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

<sup>1</sup>Esta hipótesis no es necesaria, sólo la imponemos porque la demostración del lema es algo más sencilla.

*Demostración.* Sea  $x \in \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ . Si  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}_x = k$ , entonces  $\bar{x}_i = \alpha_i \in k$ . Por tanto,  $x_i - \alpha_i \in \mathfrak{p}_x$  y se cumple que  $\mathfrak{p}_x = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ . Además, se cumple la inclusión  $I = (p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_m(x_1, \dots, x_n)) \subseteq \mathfrak{p}_x$  si y sólo si  $p_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \dots, p_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ . En conclusión, como los puntos racionales de  $A$ , se corresponden con los puntos racionales de  $k[x_1, \dots, x_n]$  que contienen a  $I$ , los puntos racionales de  $A$  se corresponden biyectivamente con las soluciones del sistema de ecuaciones

$$p_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, p_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

□

**Teorema 1.2.44 (de los ceros de Hilbert).** *Sea  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito y  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal. Entonces  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$  es una extensión finita de  $k$ . En particular, si  $k$  es algebraicamente cerrado  $k = k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$ . “Todo punto cerrado de una variedad algebraica afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es racional”.*

*Demostración.* Obviamente  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito sobre  $k$ . Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito

$$k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow k[\xi_1, \dots, \xi_n]/\mathfrak{m}$$

Por tanto, el término de la izquierda de la flecha ha de tener dimensión cero, luego  $r = 0$  y concluimos. □

**Ejercicio 1.2.45.** Calcular los ideales maximales de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  y los de  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$ .

**Ejercicio 1.2.46.** Sean  $X = \text{Spec } A$  y  $Y = \text{Spec } B$  dos variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $k$ . Definamos  $X \times_k Y = \text{Spec } A \otimes_k B$ . Probar que los puntos cerrados de la variedad algebraica  $X \times_k Y$  son el producto cartesiano de los puntos cerrados de  $X$  pos los de  $Y$ .

**Proposición 1.2.47.** *Sea  $f^*: X = \text{Spec } B \rightarrow Y = \text{Spec } A$  un morfismo entre variedades algebraicas afines. La imagen por  $f^*$  de un punto cerrado es un punto cerrado.*

*Demostración.* Dado un punto cerrado  $x \in X$  y  $f^*(x) = y$ , tenemos que  $\mathfrak{p}_y = f^{-1}\mathfrak{p}_x$ , luego el morfismo  $A/\mathfrak{p}_y \hookrightarrow B/\mathfrak{p}_x$  es inyectivo. Por el teorema de los ceros de Hilbert,  $B/\mathfrak{p}_x$  es una extensión finita de  $k$ , por tanto  $A/\mathfrak{p}_y$  también, luego es un cuerpo. Es decir,  $f^*(x) = y$  es un punto cerrado. □

**Corolario 1.2.48.** *Sea  $U \subset X$  un abierto de una variedad algebraica afín. Los puntos cerrados de  $U$  se corresponden con los puntos cerrados de  $X$  que yacen en  $U$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in U$  un punto cerrado, sea  $U_a = \text{Spec } A_a \subset X = \text{Spec } A$  un abierto básico conteniendo a  $x$ , tal que  $U_a \subseteq U$ . Obviamente  $x$  es un punto cerrado de  $U_a$ .  $A_a = A[\frac{1}{a}]$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito, luego  $U_a = \text{Spec } A_a$  es una variedad algebraica. Por la proposición anterior aplicada a la inclusión  $U_a \subset X$ , tenemos que  $x$  es un punto cerrado de  $X$ . Hemos concluido. □

**Corolario 1.2.49 (forma fuerte de los ceros de Hilbert).** *Sea  $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito y  $f \in k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ . Si  $f$  se anula en todo ideal maximal entonces es nilpotente. En particular, si una función se anula en todos los puntos racionales de una variedad algebraica afín íntegra, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces es nula.*

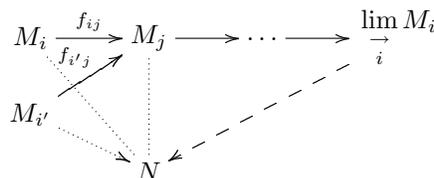


Si  $\varinjlim M_i$  existe, entonces el morfismo  $\text{Id} \in \text{Hom}_C(\varinjlim M_i, \varinjlim M_i)$  define morfismos  $\phi_i: M_i \rightarrow \varinjlim M_i$ , de modo que

1.  $\phi_i = \phi_j f_{ij}$
2. Dados  $\{(f_i) \in \bigoplus_i \text{Hom}_C(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces existe un único morfismo  $f: \varinjlim M_i \rightarrow N$ , de modo que  $f_i = f \phi_i$ .

Se tiene también el recíproco, si existe un objeto  $M$ , y morfismos  $\phi_i: M_i \rightarrow M$ , verificando estas dos condiciones, entonces  $M = \varinjlim M_i$ .

Intuitivamente  $\varinjlim M_i$  es “la desembocadura del río de flechas, la cota superior mínima”



**Teorema 1.3.3.** En la categoría de conjuntos los límites inductivos existen, explícitamente

$$\varinjlim M_i = \left\{ \prod_i M_i / \sim : m_i \sim m_j \text{ si existe un } k \text{ de modo que } f_{ik}(m_i) = f_{jk}(m_j) \right\}$$

y  $\phi_j: M_j \rightarrow \varinjlim M_i$ ,  $\phi_j(m_j) = \bar{m}_j$ .

*Demostración.* Denotemos  $M = \prod_i M_i / \sim$ . Dados  $\{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces la aplicación  $f: M \rightarrow N$ ,  $f(\bar{m}_i) = f_i(m_i)$  está bien definida y cumple que  $f_i = f \phi_i$ .

Recíprocamente, dado  $f: M \rightarrow N$ , las aplicaciones  $f_i = f \phi_i$  cumplen que  $f_i = f_j f_{ij}$  para todo  $i \leq j$ .

Estas asignaciones son inversas entre sí, luego hemos concluido.  $\square$

**Teorema 1.3.4.** En la categoría de  $A$ -módulos los límites inductivos existen, explícitamente

$$\varinjlim M_i = \left\{ \prod_i M_i / \sim : m_i \sim m_j \text{ si existe un } k \text{ de modo que } f_{ik}(m_i) = f_{jk}(m_j) \right\}$$

y  $\phi_j: M_j \rightarrow \varinjlim M_i$ ,  $\phi_j(m_j) = \bar{m}_j$ .

*Demostración.* Repítase la demostración anterior y pruébese que los conjuntos definidos son  $A$ -módulos y los morfismos morfismos de  $A$ -módulos.  $\square$

**Definición 1.3.5.** Un morfismo  $f$  entre dos sistemas inductivos de módulos  $\{M_i, f_{ij}\}$  y  $\{N_i, g_{ij}\}$ , con el mismo conjunto ordenado de índices, es una familia de morfismos  $f_i: M_i \rightarrow N_i$  tales que  $f_j f_{ij} = g_{ij} f_i$ , cuando  $i \leq j$ .



**Definición 1.3.9.** Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  un sistema proyectivo de objetos. Diremos que el objeto  $\varprojlim_i M_i$  (si existe) es el límite proyectivo de este sistema proyectivo, si se cumple una igualdad funtorial

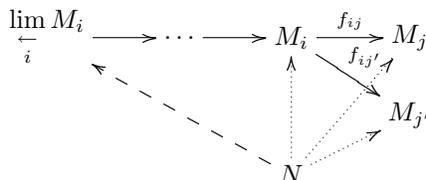
$$\text{Hom}_C(N, \varprojlim_i M_i) = \left\{ (f_i) \in \prod_i \text{Hom}_C(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} f_i \text{ para todo } i \leq j \right\}$$

Si  $\varprojlim_i M_i$  existe, entonces el morfismo  $\text{Id} \in \text{Hom}_C(\varprojlim_i M_i, \varprojlim_i M_i)$  define morfismos  $\phi_i: \varprojlim_i M_i \rightarrow M_i$ , de modo que

1.  $\phi_j = f_{ij} \phi_i$
2. Dados  $\{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}_C(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} f_i \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces existe un único morfismo  $f: N \rightarrow \varprojlim_i M_i$ , de modo que  $f_i = \phi_i f$ .

Se tiene también el recíproco, si existe un objeto  $M$ , y morfismos  $\phi_i: M \rightarrow M_i$ , verificando estas dos condiciones, entonces  $M = \varprojlim_i M_i$ .

Intuitivamente  $\varprojlim_i M_i$  es “la fuente del río de flechas, la cota inferior máxima”



**Ejercicio 1.3.10.** Sea  $\{k[x]/(x^n)\}$  el sistema proyectivo de  $k[x]$ -módulos, de morfismos  $k[x]/(x^{n+1}) \rightarrow k[x]/(x^n)$  los morfismos naturales de paso al cociente. Probar que  $\varprojlim_n k[x]/(x^n) = k[[x]]$ .

**Teorema 1.3.11.** En la categoría de conjuntos los límites proyectivos existen, explícitamente

$$\varprojlim_i M_i = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$$

y  $\phi_i: \varprojlim_i M_i \rightarrow M_i$ ,  $\phi_i((m_j)) = m_i$ .

*Demostración.* Denotemos  $M = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$ . Dados  $\{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} f_i \text{ para todo } i \leq j\}$ , entonces la aplicación  $f: N \rightarrow M$ ,  $f(n) = (f_i(n))$  está bien definida y cumple que  $f_i = \phi_i f$ .

Recíprocamente, dado  $f: N \rightarrow M$ , las aplicaciones  $f_i = \phi_i f$  cumplen que  $f_j = f_{ij} f_i$  para todo  $i \leq j$ .

Estas asignaciones son inversas entre sí, luego hemos concluido. □

**Teorema 1.3.12.** *En la categoría de  $A$ -módulos los límites proyectivos existen, explícitamente*

$$\lim_{\leftarrow i} M_i = \{(m_i) \in \prod_i M_i \mid f_{ij}(m_i) = m_j \text{ para todo } i \leq j\}$$

y  $\phi_i: \lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow M_i$ ,  $\phi_i((m_j)) = m_i$ .

*Demostración.* Repítase la demostración anterior.  $\square$

**Definición 1.3.13.** Un morfismo  $f$  entre dos sistemas proyectivos de módulos  $\{M_i, f_{ij}\}$  y  $\{N_i, g_{ij}\}$ , con el mismo conjunto ordenado de índices, es una familia de morfismos  $f_i: M_i \rightarrow N_i$  tales que  $f_j f_{ij} = g_{ij} f_i$ , cuando  $i \leq j$ .

Todo morfismo  $f$  entre dos sistemas proyectivos induce morfismos  $\lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow \lim_{\leftarrow i} N_i$ , que induce un morfismo  $\widehat{f}: \lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow \lim_{\leftarrow i} N_i$ , que explícitamente (en la categoría de conjuntos, o módulos) está definido por  $\widehat{f}((m_i)) = (f_i(m_i))$ .

**Definición 1.3.14.** Diremos que una sucesión de morfismos de sistemas proyectivos de módulos  $\{M'_i\} \rightarrow \{M_i\} \rightarrow \{M''_i\}$  es exacta si lo es la sucesión  $M'_i \rightarrow M_i \rightarrow M''_i$ , para todo  $i$ .

**Proposición 1.3.15.** *La toma de límites proyectivos es exacta por la izquierda. Es decir, si  $0 \rightarrow \{M'_i\} \rightarrow \{M_i\} \rightarrow \{M''_i\}$  son sucesiones exactas de sistemas proyectivos de  $A$ -módulos, entonces la sucesión de  $A$ -módulos*

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow i} M'_i \rightarrow \lim_{\leftarrow i} M_i \rightarrow \lim_{\leftarrow i} M''_i$$

*es exacta*

*Demostración.* Es una sencilla comprobación, conocida la construcción explícita de los límites proyectivos de módulos.  $\square$

Dado un morfismo de objetos  $f: M \rightarrow M'$ , denotaremos  $f_*: \text{Hom}_C(N, M) \rightarrow \text{Hom}_C(N, M')$  a la aplicación de conjuntos definida por  $f_*(g) = f \circ g$ . Dado un sistema proyectivo  $\{M_i, f_{ij}\}_{i \in I}$  de objetos de una categoría  $C$ , entonces  $\{\text{Hom}_C(N, M_i), f_{ij*}\}_{i \in I}$  forma un sistema proyectivo de conjuntos.

**Ejercicio 1.3.16.** Consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  el epimorfismo natural de paso al cociente  $k[x] \rightarrow k[x]/(x^n)$ . Probar que el límite proyectivo de estos epimorfismos no es un epimorfismo.

**Proposición 1.3.17.**  $\text{Hom}_C(N, \lim_{\leftarrow i} M_i) = \lim_{\leftarrow i} \text{Hom}_C(N, M_i)$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(N, \lim_{\leftarrow i} M_i) &= \{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}_C(N, M_i) \mid f_j = f_{ij} f_i \text{ para todo } i \leq j\} \\ &= \lim_{\leftarrow i} \text{Hom}_C(N, M_i) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es por la definición de límite proyectivo, y la segunda igualdad por la construcción del límite proyectivo de conjuntos.  $\square$

Dado un sistema inductivo  $\{M_i, f_{ij}\}_{i \in I}$  de objetos de una categoría  $C$ , entonces  $\{\text{Hom}_C(M_i, N), f_{ij}^*\}_{i \in I}$  forma un sistema proyectivo de conjuntos.

**Proposición 1.3.18.**  $\text{Hom}_C(\varinjlim M_i, N) = \varprojlim \text{Hom}_C(M_i, N)$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(\varinjlim M_i, N) &= \{(f_i) \in \prod_i \text{Hom}_C(M_i, N) \mid f_i = f_j f_{ij} \text{ para todo } i \leq j\} \\ &= \varprojlim \text{Hom}_C(M_i, N) \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es por la definición de límite inductivo, y la segunda igualdad por la construcción del límite proyectivo de conjuntos.  $\square$

**Proposición 1.3.19.** *El límite inductivo conmuta con el producto tensorial. Es decir,*

$$(\varinjlim M_i) \otimes_A N = \varinjlim (M_i \otimes_A N)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A((\varinjlim M_i) \otimes_A N, R) &= \\ &= \text{Hom}_A(\varinjlim M_i, \text{Hom}_A(N, R)) = \varprojlim \text{Hom}_A(M_i, \text{Hom}_A(N, R)) \\ &= \varprojlim \text{Hom}_A(M_i \otimes_A N, R) = \text{Hom}_A(\varinjlim (M_i \otimes_A N), R) \end{aligned}$$

$\square$

## 1.4 Completación

**Definición 1.4.1.** Una filtración de un  $A$ -módulo  $M$  es una cadena de submódulos

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

Dada una filtración  $\{M_i\}$  podemos definir una topología en  $M$ : Una base de entornos de cada  $m \in M$  es  $\{m + M_i\}$ .

Esta topología viene definida por la pseudométrica  $d$ :

$$d(m_1, m_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } m_1 - m_2 \in M_n, \text{ y } m_1 - m_2 \notin M_{n+1} \\ 0 & \text{si } m_1 - m_2 \in M_n \text{ para todo } n \end{cases}$$

Una vez que hemos definido  $d$ , podemos hablar de sucesiones convergentes, de sucesiones de Cauchy y la completación de  $M$  por  $d$ .

**Definición 1.4.2.** Se define la completación de  $M$  respecto de la topología definida por una filtración como el  $A$ -módulo  $\widehat{M}$

$$\widehat{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{Mód. de sucesiones de Cauchy}\} / \{\text{Mód. de sucesiones converg. a cero}\}$$

**Proposición 1.4.3.**  $\widehat{M} = \varprojlim_{j \in \mathbb{N}} M/M_j$ .

*Demostración.* Sea  $(\bar{m}_i) \in \varprojlim_j M/M_j$  (luego  $\bar{m}_{i+r} = \bar{m}_i$  en  $M/M_i$ ). La sucesión  $(m_i)$  es de Cauchy, porque dado  $\epsilon^{-j}$  entonces  $d(m_r, m_s) < \epsilon^{-j}$ , para todo  $r, s \geq j$ . Así pues, tenemos definido el morfismo

$$\varprojlim_j M/M_j \rightarrow \widehat{M}, (\bar{m}_i) \mapsto [(m_i)]$$

Dejamos como ejercicio la comprobación de que está bien definido.

Recíprocamente. Sea  $(m_i)$  una sucesión de Cauchy. Dado  $\epsilon^{-j}$ , existe  $n_j \in \mathbb{N}$  de modo que  $d(m_r, m_s) < \epsilon^{-j}$ , para todo  $r, s \geq n_j$ . Es decir,  $m_r - m_s \in M_j$  para todo  $r, s \geq n_j$ , i.e.,  $\bar{m}_r = \bar{m}_s \in M/M_j$  para todo  $r, s \geq n_j$ .

Observemos que el morfismo

$$\{\text{Mód. de sucesiones de Cauchy}\} \rightarrow M/M_j, (m_i) \mapsto \bar{m}_{n_j}$$

no depende del  $n_j \gg 0$  escogido. En particular, dada una sucesión  $(m_i)$  convergente a cero, se tiene que  $\bar{m}_{n_j} = 0$ . Por tanto, los morfismos

$$\widehat{M} \rightarrow M/M_j, [(m_i)] \mapsto \bar{m}_{n_j}$$

están bien definidos y definen el morfismo

$$\widehat{M} \rightarrow \varprojlim_j M/M_j, [(m_i)] \mapsto (\bar{m}_{n_j})$$

Dejamos como ejercicio la comprobación de que estas asignaciones son inversas entre sí.  $\square$

*Observación 1.4.4.* Un ejemplo de sucesión de Cauchy lo constituyen las series  $\sum_{i=0}^{\infty} m_i$  ( $m_i \in M_i$ ). Es más, toda sucesión de Cauchy es equivalente a una serie de esta forma: Por la proposición anterior, basta verlo para la sucesión de Cauchy  $(n_i)$ , con  $(\bar{n}_i) \in \varprojlim_i M/M_i$  ( $\bar{n}_{i+1} = \bar{n}_i \in M/M_i$ ). Tenemos que  $n_{i+1} - n_i = m_i \in M_i$ . Por tanto,  $n_1 = m_0$ ;  $n_2 = m_1 + n_1 = m_1 + m_0$ ;  $n_3 = m_2 + n_2 = m_2 + m_1 + m_0$ , etc. Así pues,

$$\widehat{M} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} m_i, m_i \in M_i \right\} / \{ \text{Series converg. a cero} \}$$

Si consideramos cada elemento  $m \in M$  como la sucesión constante  $(m)$ , tenemos definido un morfismo  $M \rightarrow \widehat{M}$ ; de otro modo, los morfismos de paso al cociente  $M \rightarrow M/M_i$  definen un morfismo  $M \rightarrow \widehat{M} = \varprojlim_j M/M_j$ ; o de otro modo, cada  $m \in M$ , puede considerarse como la serie  $m + 0 + \dots + 0 + \dots \in \widehat{M}$ .

**Proposición 1.4.5.**  $M$  con la filtración  $\{M_n\}$  es separado  $\iff \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0 \iff M \hookrightarrow \widehat{M}$ .

*Demostración.* El núcleo del morfismo  $M \rightarrow \widehat{M} = \varprojlim_i M/M_i$  es  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$ . Luego,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0 \iff M \hookrightarrow \widehat{M}$ .

Si  $M$  es separado, dado  $m \in M$  existe un entorno  $M_n$  del cero que no contiene a  $m$ , es decir,  $m \notin M_n$ . Luego  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ .

Si  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ , entonces  $d$  es una distancia, porque si  $d(m, m') = 0$  esto significa que  $m - m' \in M_n$  para todo  $n$ , es decir que  $m - m' \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = 0$ , luego  $m = m'$ . Luego  $M$  es separado.  $\square$

Dadas dos filtraciones de  $A$ -módulos  $\{M_i\}$  y  $\{N_i\}$  de  $M$  y  $N$  respectivamente, un morfismo de filtraciones es un morfismo de  $A$ -módulos  $f: M \rightarrow N$  tal que  $f(M_n) \subseteq N_n$ . Evidentemente un morfismo  $f: M \rightarrow N$  de filtraciones induce un morfismo

$$\widehat{f}: \widehat{M} = \varprojlim_i M/M_i \rightarrow \widehat{N} = \varprojlim_i N/N_i$$

**Teorema 1.4.6.** *Sea  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta de  $A$ -módulos y  $\{M_i\}$  una filtración de  $M$ . Si se consideran en  $M'$  y  $M''$  las filtraciones inducidas  $\{M' \cap M_i\}$ ,  $\{\pi(M_i)\}$ , la sucesión de completados*

$$0 \rightarrow \widehat{M'} \rightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{M''} \rightarrow 0$$

*es exacta. "Completar conserva sucesiones exactas".*

*Demostración.* Tenemos las sucesiones exactas de sistemas proyectivos

$$0 \rightarrow M'/M' \cap M_i \rightarrow M/M_i \xrightarrow{\pi} M''/\pi(M_i) \rightarrow 0$$

Por tanto, como el límite proyectivo es exacto por la izquierda tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \widehat{M'} \rightarrow \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widehat{M''}$$

Sólo nos falta ver la epiyectividad de  $\widehat{\pi}$ : Dada una serie  $\sum_{i=0}^{\infty} m''_i$ , con  $m''_i \in \pi(M_i)$ , sean  $m_i \in M_i$  tales que  $\pi(m_i) = m''_i$ . Es obvio que  $\widehat{\pi}(\sum_{i=0}^{\infty} m_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m''_i$ , luego por la observación anterior hemos concluido.  $\square$

**Corolario 1.4.7.**  *$\widehat{M}_n$  es un submódulo de  $\widehat{M}$  y  $\widehat{M}/\widehat{M}_n = M/M_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Por el teorema  $\widehat{M}_n \hookrightarrow \widehat{M}$  y  $\widehat{M}/\widehat{M}_n = (\widehat{M}/\widehat{M}_n)$ . Ahora bien,  $(\widehat{M}/\widehat{M}_n) = \varprojlim_i (M/M_n)/[M_i] = \varprojlim_{i>n} (M/M_n)/[M_i] = \varprojlim_{i>n} M/M_n = M/M_n$ , con lo que concluimos.  $\square$

**Corolario 1.4.8.**  *$\widehat{M}$  es completo y separado, respecto de la topología definida por la filtración  $\{\widehat{M}_n\}$ , es decir,  $\widehat{\widehat{M}} = \widehat{M}$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia directa del corolario anterior y 1.4.5.  $\square$

**Definición 1.4.9.** Se define el graduado de  $M$  por la filtración  $\{M_n\}$  como el módulo  $GM = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i/M_{i+1}$ .

**Corolario 1.4.10.** Si consideramos en  $M$  una filtración  $\{M_n\}$  y en  $\widehat{M}$  la filtración  $\{\widehat{M}_n\}$ , se verifica que  $GM = G\widehat{M}$ .

*Demostración.* Completando  $0 \rightarrow M_{n+1} \rightarrow M_n \rightarrow M_n/M_{n+1} \rightarrow 0$  obtenemos que  $M_n/\widehat{M}_{n+1} = \widehat{M}_n/\widehat{M}_{n+1}$ . Como  $M_n/\widehat{M}_{n+1} = M_n/M_{n+1}$ , tenemos que  $M_n/M_{n+1} = \widehat{M}_n/\widehat{M}_{n+1}$ . En conclusión,  $GM = G\widehat{M}$ .  $\square$

### 1.4.1 Ejemplos de completaciones y graduados

**Ejemplo 1.4.11.**  $\lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_\alpha^n = \mathbb{R}[[x - \alpha]]$ , donde el  $\mathfrak{m}_\alpha$  es el ideal de funciones diferenciables que se anulan en  $\alpha \in \mathbb{R}$ . El morfismo natural  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/\mathfrak{m}_\alpha^n = \mathbb{R}[[x - \alpha]]$  asigna a cada función su desarrollo de Taylor en  $\alpha$ .

**Ejemplo 1.4.12.**  $\lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} k[x]/(x)^n = k[[x]]$ . El morfismo  $k[x] \rightarrow \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} k[x]/(x)^n = k[[x]]$ , es el morfismo que considera cada polinomio como una serie.

**Ejemplo 1.4.13.** Números  $p$ -ádicos  $= \hat{\mathbb{Z}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p^n, 0 \leq a_i < p \}$ . El morfismo natural  $\mathbb{N} \rightarrow \lim_{\leftarrow n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n p^n, 0 \leq a_i < p \}$  asigna a cada número natural su desarrollo como suma de potencias de  $p$ .

El espacio tangente a una variedad diferenciable en un punto es un concepto intrínseco, que no depende de la inmersión de la variedad diferenciable en un  $\mathbb{R}^n$ . El espacio tangente a una variedad en un punto se define en términos de su anillo de funciones diferenciables. Ya sabemos que la diferencial de una función en un punto y los módulos de diferenciales de Kähler son conceptos algebraicos. En esta sección, dado un anillo local, definiremos el espacio tangente en el punto cerrado.

Comencemos con un ejemplo sencillo. Consideremos el nodo en el plano afín  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ . El espacio tangente en el origen del nodo es aquella variedad homogénea que mejor se aproxima al nodo. El nodo “infinitesimalmente” en el origen es equivalente a  $y^2 - x^2 = 0$ . Así pues, diremos que el cono tangente a  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$  en el origen es  $y^2 - x^2 = 0$ . En general, si una subvariedad  $X \subset \mathbb{A}_n$ , viene definida por los ceros de un ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , entonces el cono tangente  $C_x X$  en el origen es la variedad definida por el ideal  $I_h = (f_r)_{f \in I}$ , donde  $f_r$  es la parte homogénea de grado más pequeño de  $f$ . Es decir, si pensamos que  $X$  es la intersección de las variedades  $f = 0$ , con  $f \in I$ , entonces el cono tangente es la intersección de las variedades homogéneas  $f_r = 0$ .<sup>2</sup>

Veamos cómo construir  $I_h$ . Sea  $\mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$  y  $\bar{\mathfrak{m}}_x \subset k[x_1, \dots, x_n]/I$  el ideal maximal de las funciones de  $X$  que se anulan en el origen. Se tiene la sucesión exacta  $I \cap \mathfrak{m}_x^r \rightarrow \mathfrak{m}_x^r \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x^r \rightarrow 0$  y por tanto la sucesión exacta

$$I \cap \mathfrak{m}_x^r \rightarrow \mathfrak{m}_x^r/\mathfrak{m}_x^{r+1} \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x^r/\bar{\mathfrak{m}}_x^{r+1} \rightarrow 0$$

En conclusión,

$$\bar{\mathfrak{m}}_x^r/\bar{\mathfrak{m}}_x^{r+1} = \{ \text{Polinomios } p(x_1, \dots, x_n) \text{ homogéneos de grado } r \} / \{ f_r \}_{f=f_r+\dots+f_n \in I}$$

<sup>2</sup> Advertamos que debemos tomar todas las  $f \in I$  y que no basta con tomar cualquier sistema generador

Por tanto,  $\bigoplus_r \bar{\mathfrak{m}}_x^r / \bar{\mathfrak{m}}_x^{r+1} = k[x_1, \dots, x_n] / I_h$ . Entonces  $\text{Spec} \bigoplus_r \bar{\mathfrak{m}}_x^r / \bar{\mathfrak{m}}_x^{r+1}$  es el cono tangente de  $X$  en  $x$  y  $\text{Proj} \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bar{\mathfrak{m}}_x^r / \bar{\mathfrak{m}}_x^{r+1}$  es el espacio tangente de  $X$  en  $x$ .

Demos ahora las definiciones con toda precisión y mayor generalidad. Si  $I$  es un ideal de  $A$ , denotaremos  $G_I M$  al graduado de  $M$  por la filtración  $M_n = I^n M$ .

**Definición 1.4.14.** Sea  $X = \text{Spec} A$  y  $x \in X$  un punto cerrado de ideal  $\mathfrak{m}$ . Llamaremos cono tangente de  $X$  en  $x$  a

$$C_x X = \text{Spec} G_{\mathfrak{m}} A := \text{Spec} \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1}$$

Llamaremos vértice del cono al punto de  $C_x X$  definido por el ideal (maximal) irrelevante  $\bigoplus_{r>0} \mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1}$ . Llamaremos espacio tangente de  $X$  en  $x$  a

$$T_x X := \text{Proj} G_{\mathfrak{m}} A$$

**Ejemplo 1.4.15.** El cono tangente de un espacio afín en el origen es isomorfo al espacio afín. Es decir, si  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  y  $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $G_{\mathfrak{m}} A \simeq A$ .

**Proposición 1.4.16.** Sea  $I \subset A$  un ideal y  $f \in I^r - I^{r+1}$ . Denotemos  $f_r$  la clase de  $f$  en  $I^r / I^{r+1} \subset G_I A$ . Si  $f_r$  es no divisor de cero en  $G_I A$ , entonces

1.  $(f) \cap I^n = f \cdot I^{n-r}$ , para  $r \geq n$ .
2.  $G_{\bar{I}}(A/(f)) = (G_I A)/(f_r)$ , donde  $\bar{I}$  es el ideal  $I$  en  $A/(f)$ .

*Demostración.* 1. Es claro que  $f \cdot I^{n-r} \subseteq (f) \cap I^n$ . Probemos la inclusión inversa. Si  $h \in (f) \cap I^n$ , entonces  $h = f \cdot g$ , con  $g \in A$ . Sea  $s \geq 0$  el máximo tal que  $g \in I^s$ . Tenemos que ver que  $s \geq n - r$ . Escribamos  $0 \neq g_s = \bar{g} \in I^s / I^{s+1}$ . Por hipótesis,  $0 \neq f_r \cdot g_s \in I^{r+s} / I^{r+s+1}$ , luego  $h = f \cdot g \notin I^{r+s+1}$ . Por tanto,  $n < r + s + 1$ , es decir,  $s \geq n - r$ .

2. Por 1., la sucesión

$$0 \rightarrow I^{n-r} / I^{n-r+1} \xrightarrow{f_r} I^n / I^{n+1} \rightarrow \bar{I}^n / \bar{I}^{n+1} \rightarrow 0$$

es exacta, luego  $G_{\bar{I}}(A/(f)) = (G_I A)/(f_r)$ . □

**Ejercicio 1.4.17.** Escribamos el polinomio  $p(x, y) = p_n(x, y) + p_{n+1}(x, y) + \dots + p_m(x, y)$  como suma de polinomios homogéneos. Sea  $\mathcal{O} = (k[x, y]/p(x, y))_{x_0}$ , con  $\mathfrak{m}_{x_0} = (x, y)$ . Demostrar que  $G_{\mathfrak{m}_{x_0}} \mathcal{O} = k[x, y]/(p_n(x, y))$ .

**Ejercicio 1.4.18.** Probar que el espacio tangente de la intersección de dos hipersuperficies transversales es la intersección de los espacios tangentes. Es decir, considérese el espacio afín  $\mathbb{A}_3 = \text{Spec} k[x_1, x_2, x_3]$  y las superficies  $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ . Sea  $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3)$ , y  $f_{1,n}$ ,  $f_{2,m}$  las componentes homogéneas de grado mínimo de  $f_1$ ,  $f_2$ . Si  $f_{2,m}$  es no divisor de cero en  $G_{\mathfrak{m}}(k[x_1, x_2, x_3]/(f_1)) = k[x_1, x_2, x_3]/(f_{1,n})$ , entonces

$$G_{\mathfrak{m}}(k[x_1, x_2, x_3]/(f_1, f_2)) \simeq k[x_1, x_2, x_3]/(f_{1,n}, f_{2,m})$$

### 1.4.2 Topología $I$ -ádica. Completación $I$ -ádica

Todos los ejemplos de completación que hemos dado son casos particulares de completación  $I$ -ádica. Restrinjámonos a esta situación.

Sea  $I$  un ideal de un anillo  $A$  y  $\{M_n\}$  una filtración de un  $A$ -módulo  $M$ . Diremos que  $\{M_n\}$  es una  $I$ -filtración si se verifica  $IM_n \subseteq M_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Diremos que la  $I$ -filtración es  $I$ -estable si existe un  $h \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > h$  se verifica que  $IM_n = M_{n+1}$ .

**Proposición 1.4.19.** *Todas las filtraciones  $I$ -estables de un  $A$ -módulo  $M$  definen la misma topología. Es más, se verifica que dadas dos filtraciones  $\{M_n\}, \{M'_n\}$   $I$ -estables de  $M$ , existe un  $h$  tal que*

$$\begin{cases} M_{n+h} \subseteq M'_n & \text{para todo } n \\ M'_{n+h} \subseteq M_n & \text{para todo } n \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $h \in \mathbb{N}$  de modo que para todo  $n \geq h$  se verifique que  $IM_n = M_{n+1}$  y  $IM'_n = M'_{n+1}$ . Entonces,  $M_{n+h} = I^n M_h \subseteq I^n M \subseteq M'_n$  y  $M'_{n+h} = I^n M'_h \subseteq I^n M \subseteq M_n$ .  $\square$

**Definición 1.4.20.** Dado un ideal  $I \subset A$  y un  $A$ -módulo  $M$ , diremos que la filtración  $I$ -estable  $M \supseteq IM \supseteq I^2 M \supseteq \dots \supseteq I^n M \supseteq \dots$  es la filtración  $I$ -ádica.

La topología definida por cualquier filtración  $I$ -estable se denomina la topología  $I$ -ádica.

De ahora en adelante, completar se entenderá que es completar respecto de la topología  $I$ -ádica.

**Proposición 1.4.21.** *Si  $I$  es un ideal finito generado, por ejemplo si  $A$  es un anillo noetheriano, entonces  $\widehat{I^n M} = I^n \widehat{M}$ .*

*Demostración.* Consideremos la inyección  $I^n M \hookrightarrow M$ . Completando tenemos la inyección  $\widehat{I^n M} \hookrightarrow \widehat{M}$ .

Sea  $i_1, \dots, i_r$  un sistema generador de  $I^n$ . Consideremos el epimorfismo  $M \oplus \dots \oplus M \rightarrow I^n M$ ,  $(m_1, \dots, m_r) \mapsto \sum_j i_j m_j$ . Completando  $I$ -ádicamente tenemos un epimorfismo  $\widehat{M} \oplus \dots \oplus \widehat{M} \rightarrow \widehat{I^n M}$  y recordemos la inyección  $\widehat{I^n M} \hookrightarrow \widehat{M}$ . Hemos obtenido que  $\widehat{I^n M} = I^n \widehat{M}$ .  $\square$

**Corolario 1.4.22.** *Si  $I$  es un ideal finito generado, por ejemplo si  $A$  es un anillo noetheriano, el completado de un módulo por la topología  $I$ -ádica es completo y separado para la topología  $I$ -ádica, i.e.,  $\widehat{\widehat{M}} = \widehat{M}$ . Además,  $\widehat{M}/I^n \widehat{M} = M/I^n M$  y  $G\widehat{M} = GM$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia directa de la proposición anterior y 1.4.7, 1.4.8, 1.4.10.  $\square$

### 1.4.3 Artin-Rees

El teorema de Artin-Rees será fundamental para demostrar que la completación  $I$ -ádica es exacta (para módulos finito generados), para demostrar que el morfismo de completación es plano y en la teoría de la dimensión para demostrar, mediante el polinomio de Samuel, el teorema del ideal principal de Krull.

**Definición 1.4.23.** Dado un ideal  $I \subset A$ , llamaremos

$$DA = A \oplus I \oplus I^2 \dots$$

“dilatado de  $A$  por  $I$  o anillo de Rees en  $I$ ”. En general dado un  $A$ -módulo  $M$  y una  $I$ -filtración  $\{M_n\}$ , llamaremos dilatado de  $M$  por la  $I$ -filtración a  $DM = M \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ .

**Definición 1.4.24.** Diremos que  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es un anillo graduado si los  $A_i$  son subgrupos aditivos de  $A$  y para cada  $a_i \in A_i$  y  $a_j \in A_j$  entonces  $a_i \cdot a_j \in A_{i+j}$ .

Observemos que  $DA$  es un anillo graduado. Si  $A$  es noetheriano entonces  $I = (\xi_1, \dots, \xi_r)$  es finito generado. El morfismo

$$\begin{array}{ccc} A[x_1, \dots, x_r] & \rightarrow & DA = A \oplus I \oplus \dots \oplus I^n \oplus \dots \\ x_i & \mapsto & \xi_i \end{array}$$

es epiyectivo, luego  $DA$  es noetheriano.

**Definición 1.4.25.** Sea  $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$  un anillo graduado. Diremos que un  $A$ -módulo  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$  es un  $A$ -módulo graduado si para cada  $a_i \in A_i$  y  $m_j \in M_j$  entonces  $a_i m_j \in M_{i+j}$ .

Observemos que  $DM$  es un  $DA$ -módulo graduado.

**Lema 1.4.26.** Sea  $A$  noetheriano,  $M$  un  $A$ -módulo finito generado y  $\{M_n\}$  una  $I$ -filtración. La filtración es  $I$ -estable  $\iff DM$  es un  $DA$ -módulo finito generado.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\{M_n\}$  es  $I$ -estable, i.e., existe un  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $\{M_n\} = \{M_0, \dots, M_r, IM_r, I^2 M_r, \dots\}$ . Observemos que el  $DA$ -submódulo de  $DM$  generado por  $M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \subset DM$  es  $M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \oplus IM_r \oplus I^2 M_r \oplus \dots$ . Por tanto,  $DM = \langle M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \rangle$  es finito generado, porque  $M, M_1, \dots, M_r$  son  $A$ -módulos finito generados.

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente. Supongamos que  $DM = \langle n_1, \dots, n_s \rangle$  es finito generado. Podemos suponer que los  $n_i$  son homogéneos. Sea  $r = \max\{\text{gr } n_i, 1 \leq i \leq s\}$ . Entonces  $DM = \langle n_1, \dots, n_s \rangle = \langle M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \rangle = M \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_r \oplus IM_r \oplus I^2 M_r \oplus \dots$ . Luego la filtración es  $I$ -estable.  $\square$

**Teorema 1.4.27 (de Artin-Rees).** Sea  $A$  noetheriano,  $M$  un  $A$ -módulo finito generado y  $M' \subset M$  un submódulo. Consideremos en  $M$  la topología  $I$ -ádica. Se verifica que la topología inicial de  $M'$ , por la inclusión  $M' \subset M$  es la topología  $I$ -ádica de  $M'$ . Es más, la filtración  $\{M' \cap I^n M\}$  es  $I$ -estable.

*Demostración.* Consideremos en  $M'$  la  $I$ -filtración  $\{M' \cap I^n M\}$  y en  $M$  la  $I$ -ádica.  $DM'$  es un  $DA$ -submódulo de  $DM$ , donde  $DA$  es noetheriano y  $DM$  es finito generado, por el lema anterior. Entonces  $DM'$  es finito generado y de nuevo, por el lema anterior,  $\{M' \cap I^n M\}$  es  $I$ -estable.  $\square$

**Corolario 1.4.28.** Sea  $A$  noetheriano. La completación  $I$ -ádica de sucesiones exactas de  $A$ -módulos finito generados es exacta, i.e., si

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos finito generados entonces

$$0 \rightarrow \widehat{M}' \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}'' \rightarrow 0$$

es exacta.

*Demostración.* Sabemos que si completamos  $M'$  por la filtración  $\{M' \cap I^n M\}$ ,  $M$  por la filtración  $\{I^n M\}$  y  $M''$  por la filtración  $\{I^n M''\}$ , entonces la sucesión completada es exacta. Ahora bien, por Artin-Rees la filtración  $\{M' \cap I^n M\}$  es  $I$ -estable, luego completar por ella es completar por la  $I$ -ádica y hemos terminado.  $\square$

**Ejercicio 1.4.29.** Consideremos en el anillo  $k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$  el ideal maximal  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Probar que  $k[x, y]/(\widehat{y^2 - x^2 + x^3}) = k[[x, y]]/(\widehat{y^2 - x^2 + x^3})$ . Probar que  $y^2 - x^2 + x^3$  descompone en producto de dos series (“ramas”), que se corresponden con los dos ideales primos minimales del anillo completo considerado.

**Ejercicio 1.4.30.** Calcular la completación de  $k[x_1, \dots, x_n]/(p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_r(x_1, \dots, x_n))$  por el ideal  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**Corolario 1.4.31.** Sea  $A$  noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finito generado,

$$M \otimes_A \widehat{A} = \widehat{M}$$

*Demostración.* Si  $M$  es finito generado existe un epimorfismo

$$A \oplus \dots \oplus A = A^n \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

$\text{Ker } \pi$  es un submódulo de  $A^n$ , luego es finito generado y existe un epimorfismo  $A^m \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow 0$ . En conclusión, existe una sucesión exacta

$$A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (*)$$

Tensorializando por  $\otimes_A \widehat{A}$  tenemos la sucesión exacta

$$A^m \otimes_A \widehat{A} = \widehat{A}^m \rightarrow A^n \otimes_A \widehat{A} = \widehat{A}^n \rightarrow M \otimes_A \widehat{A} \rightarrow 0$$

Ahora bien, como la completación de  $(*)$  es la sucesión exacta

$$\widehat{A}^m = \widehat{A}^m \rightarrow \widehat{A}^n = \widehat{A}^n \rightarrow \widehat{M} \rightarrow 0$$

obtenemos que  $M \otimes_A \widehat{A} = \widehat{M}$ . □

**Corolario 1.4.32.** Si  $A$  es noetheriano, el morfismo  $A \rightarrow \widehat{A}$  es plano.

*Demostración.* Tenemos que ver que dada una sucesión exacta de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

entonces

$$0 \rightarrow M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M'' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow 0$$

es exacta. Como tensorializar es exacto por la derecha, sólo tenemos que ver que dada la sucesión exacta  $0 \rightarrow M' \rightarrow M$  entonces  $0 \rightarrow M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M \otimes_A \widehat{A}$  es exacta.

Si  $M'$  y  $M$  fuesen finito generados, lo tendríamos demostrado, por el corolario anterior, porque  $\otimes_A \widehat{A}$  es completar.

$M = \varinjlim_i M_i$ , siendo  $M_i$  los submódulos finito generados de  $M$ . Tenemos que  $M' = \varinjlim_i (M' \cap M_i)$ , pues  $M' \cap M_i$ , son los submódulos (con repeticiones) finito generados de  $M'$ . Tenemos que  $0 \rightarrow M' \cap M_i \rightarrow M_i$  es exacta, con  $M' \cap M_i$  y  $M_i$  finito generados. Entonces  $0 \rightarrow (M' \cap M_i) \otimes_A \widehat{A} \rightarrow M_i \otimes_A \widehat{A}$  son exactas. Luego  $0 \rightarrow \varinjlim_i ((M' \cap M_i) \otimes_A \widehat{A}) \rightarrow \varinjlim_i (M_i \otimes_A \widehat{A})$  es exacta. Por la conmutación del límite inductivo con producto tensoriales concluimos que

$$0 \rightarrow \varinjlim_i (M' \cap M_i) \otimes_A \widehat{A} = M' \otimes_A \widehat{A} \rightarrow \varinjlim_i M_i \otimes_A \widehat{A} = M \otimes_A \widehat{A}$$

es exacta. Hemos terminado. □

**Corolario 1.4.33 (Krull).** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo noetheriano e  $I \subset A$  un ideal incluido en el radical de Jacobson de  $A$ . Se verifica que  $M$  es separado para la topología  $I$ -ádica, i.e.,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M \subset M$ . Por Artin-Rees sabemos que la filtración  $\{N \cap I^n M = N\}$  es  $I$ -estable. Por tanto,  $IN = N$  y por Nakayama  $N = 0$ .  $\square$

#### 1.4.4 Completación y noetherianidad

Queremos probar que el completado de un anillo noetheriano es noetheriano. Un anillo noetheriano y su completado tienen el mismo graduado y éste es noetheriano. Probaremos que si el graduado de un anillo completo y separado es noetheriano el anillo es noetheriano y así obtendremos que el completado de un anillo noetheriano es noetheriano.

Un teorema básico en Análisis y Geometría Diferencial, es el teorema de la función inversa. Toda aplicación diferenciable  $f: X \rightarrow Y$ , entre variedades diferenciales, induce una aplicación entre los anillos  $C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$  y los espacios cotangentes  $f^*: \mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}^2 \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . El teorema de la función inversa afirma que si  $f^*$  es un isomorfismo entonces  $f$  es un isomorfismo en un entorno de  $x$ . Ahora bien,  $f^*$  es un isomorfismo si y sólo si el morfismo inducido entre los graduados  $G_{\mathfrak{m}_{f(x)}} C^\infty(Y) \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} C^\infty(X)$  lo es. Analíticamente, si el morfismo  $G_{\mathfrak{m}_{f(x)}} C^\infty(Y) \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} C^\infty(X)$  es un isomorfismo entonces el morfismo  $\widehat{C^\infty(Y)} \rightarrow \widehat{C^\infty(X)}$  es un isomorfismo. Hablemos ahora en Álgebra y con toda precisión.

**Teorema 1.4.34 (formal de la función inversa).** *Sean  $\{M_n\}$  y  $\{M'_n\}$  filtraciones de  $M$  y  $M'$  respectivamente. Supongamos que  $M$  y  $M'$  son completos y separados. Sea  $T: M \rightarrow M'$  un morfismo de filtraciones y consideremos el morfismo  $GT: GM \rightarrow GM'$  inducido. Si  $GT$  es isomorfismo (resp. epiyectivo, inyectivo) entonces  $T: M \rightarrow M'$  es isomorfismo (resp. epiyectivo, inyectivo).*

*Demostración.* Supongamos que  $GT$  es epiyectivo.

Sea  $m' \in M'$ . Como  $M/M_1 \xrightarrow{\bar{T}} M'/M'_1$  es epiyectivo existe  $m_0 \in M$ , tal que  $m' = T(m_0) + m'_1$ , con  $m'_1 \in M'_1$ . Como  $M_1/M_2 \xrightarrow{\bar{T}} M'_1/M'_2$  es epiyectivo existe  $m_1 \in M_1$ , tal que  $m'_1 = T(m_1) + m'_2$ , con  $m'_2 \in M'_2$ . Es decir  $m' = T(m_0) + T(m_1) + m'_2$ . Así sucesivamente, obtenemos una serie  $m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i$ , con  $m_i \in M_i$ , de modo que la serie  $T(m) = T(\sum_{i=0}^{\infty} m_i) = \sum_{i=0}^{\infty} T(m_i)$  converge a  $m'$ . Como  $M'$  es completo,  $T(m) = m'$  y  $T$  es epiyectivo.

Supongamos ahora que  $GT$  es inyectivo.

Sea  $m \in M$ . Como  $M$  es separado existe  $r \in \mathbb{N}$  de modo que  $m \in M_r$  y  $m \notin M_{r+1}$ . Entonces  $0 \neq \bar{m} \in M_r/M_{r+1}$ .  $GT(\bar{m}) = \overline{T(m)} \neq 0$ , porque  $GT$  es inyectivo. Luego  $T(m) \neq 0$  y  $T$  es inyectivo.

En particular, si  $GT$  es isomorfismo,  $T$  es isomorfismo.  $\square$

**Lema 1.4.35.** *Sea  $A$  un anillo completo y separado por la topología  $I$ -ádica definida por un ideal  $I \subset A$ . Si  $GA$  es noetheriano entonces  $A$  es noetheriano.*

*Demostración.* Dado un ideal  $\mathfrak{q} \subset A$  tenemos que ver que  $\mathfrak{q}$  es finito generado.

Consideremos en  $\mathfrak{q}$  la filtración  $\{\mathfrak{q} \cap I^n\}$ . Entonces tenemos una inclusión natural

$$G\mathfrak{q} = \bigoplus_n (\mathfrak{q} \cap I^n) / (\mathfrak{q} \cap I^{n+1}) \hookrightarrow \bigoplus_n I^n / I^{n+1}$$

Observemos que  $G\mathfrak{q}$  es un ideal de  $GA$  de modo natural: Dado  $\bar{q} \in (\mathfrak{q} \cap I^n)/(\mathfrak{q} \cap I^{n+1})$  y  $\bar{p} \in I^m/I^{m+1}$  entonces  $\bar{p}\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{p\bar{q}} \in (\mathfrak{q} \cap I^{m+n})/(\mathfrak{q} \cap I^{m+n+1})$ .

Como  $GA$  es noetheriano, tendremos que  $G\mathfrak{q}$  está generado por un número finito de elementos. Escribamos  $G\mathfrak{q} = (\bar{f}_{n_1}, \dots, \bar{f}_{n_r})$ , donde puedo suponer que los  $\bar{f}_{n_i} \in (\mathfrak{q} \cap I^{n_i})/(\mathfrak{q} \cap I^{n_i+1})$ .

Consideremos en  $A$  la siguiente filtración para cada  $i$ :  $A \supseteq A \supseteq \dots \supseteq A \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \dots$ . El graduado de  $A$  por esta filtración es  $GA[-n_i] = \bigoplus_n I^n/I^{n+1}$ , que es igual al anillo  $GA$ , pero decimos que los elementos de grado  $n$  de  $GA[-n_i]$  son los elementos de grado  $n - n_i$  de  $GA$ . De modo natural definimos una filtración en la suma directa  $A \oplus \dots \oplus A$ . Definamos el morfismo, de filtraciones,

$$\begin{array}{ccc} A \oplus \dots \oplus A & \xrightarrow{T} & \mathfrak{q} \\ (1, 0, \dots, 0) & \mapsto & \bar{f}_{n_1} \\ (0, 0, \dots, 1) & \mapsto & \bar{f}_{n_r} \end{array}$$

Tomando graduados, obtenemos que el morfismo

$$\begin{array}{ccc} GA[-n_1] \oplus \dots \oplus GA[-n_r] & \xrightarrow{GT} & G\mathfrak{q} \\ (1, 0, \dots, 0) & \mapsto & \bar{f}_{n_1} \in (\mathfrak{q} \cap I^{n_1})/(\mathfrak{q} \cap I^{n_1+1}) \subset G\mathfrak{q} \\ (0, 0, \dots, 1) & \mapsto & \bar{f}_{n_r} \in (\mathfrak{q} \cap I^{n_r})/(\mathfrak{q} \cap I^{n_r+1}) \subset G\mathfrak{q} \end{array}$$

es epiyectivo. Por el lema anterior,  $\widehat{T}: A \oplus \dots \oplus A \rightarrow \widehat{\mathfrak{q}}$  es epiyectivo. Ahora bien, como  $\mathfrak{q}$  es separado, porque es un subespacio de  $A$ , que es separado, tenemos que el morfismo de completación  $i: \mathfrak{q} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{q}}$  es inyectivo. Por tanto,  $T$  ha de ser epiyectivo porque  $\widehat{T} = i \circ T$  es epiyectivo. En conclusión,  $\mathfrak{q}$  es finito generado.  $\square$

**Teorema 1.4.36.** *Si  $A$  es noetheriano entonces  $\widehat{A}$  es noetheriano.*

*Demostración.* Si  $A$  es noetheriano y  $I \subset A$  es un ideal, entonces  $I = (\xi_1, \dots, \xi_r)$  es finito generado. El morfismo

$$\begin{array}{ccc} (A/I)[x_1, \dots, x_r] & \rightarrow & GA = A/I \oplus I/I^2 \oplus \dots \oplus I^n/I^{n+1} \oplus \dots \\ x_i & \mapsto & \bar{\xi}_i \end{array}$$

es epiyectivo, luego  $GA$  es noetheriano.

Por 1.4.22 tenemos que  $G\widehat{A} = GA$ . Por el lema anterior,  $\widehat{A}$  es noetheriano.  $\square$

**Corolario 1.4.37.** *Si  $A$  es noetheriano entonces  $A[[x_1, \dots, x_n]]$  es noetheriano.*

*Demostración.* Por el teorema de la base de Hilbert, si  $A$  es noetheriano entonces  $A[x_1, \dots, x_r]$  es noetheriano. Completando  $A[x_1, \dots, x_r]$  por el ideal  $I = (x_1, \dots, x_r) \subset A[x_1, \dots, x_r]$ , tenemos por el teorema anterior que  $A[[x_1, \dots, x_n]]$  es noetheriano.  $\square$

### 1.4.5 Teorema de Cohen

**Teorema 1.4.38 (Cohen).** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , completo y separado por la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica. Si  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo, existe una sección del morfismo natural  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ .*

*Demostración.* a) Supongamos que  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo de característica cero. Por tanto,  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{O}$ .

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3 & \rightarrow & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 & \rightarrow & \mathcal{O}/\mathfrak{m} \\ & & & & & & & & \parallel \text{Not} \\ & & & & & & & & K \end{array}$$

Vamos a ir levantando el morfismo  $K = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$  a  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ , posteriormente a  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ , y así sucesivamente hasta  $\widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ .

Sea  $K_1$  una  $\mathbb{Q}$ -subextensión de  $K$  maximal con la condición de que exista un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}/\mathfrak{m} = K \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & K_1 \end{array}$$

Veamos que  $K_1 = K$ :

Dado  $\bar{a} \in K$ , entonces  $\bar{a}$  es trascendente sobre  $K_1$ , o es algebraico sobre  $K_1$ . Si  $\bar{a}$  es trascendente, entonces sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  tal que  $\pi(a) = \bar{a}$ . El morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Luego por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ . Si  $\bar{a}$  es algebraico sobre  $K_1$ , sea  $p(x) \in K_1[x]$  su polinomio mínimo anulador. Sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  tal que  $\pi(a) = \bar{a}$ . Para definir bien el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\bar{a} \mapsto a$ , es necesario que  $p(a) = 0$ . Sea  $h \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \subset \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ . Desarrollando por Taylor obtenemos

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)h + c \cdot h^2 = p(a) + p'(a)h$$

Observemos que  $\pi(p(a)) = p(\bar{a}) = 0$ , luego  $p(a) \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Observemos también que  $p'(a)$  es invertible, porque  $(p(x), p'(x)) = (1)$  luego  $(p(a), p'(a)) = (1)$  y como  $p(a)$  es nilpotente,  $p'(a)$  es invertible. En conclusión, si escribimos  $h = -p(a)/p'(a)$  entonces  $h \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\pi(a+h) = \bar{a}$  y  $p(a+h) = 0$ . Así pues, cambiando  $a$  por  $a+h$ , tenemos que el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ .

En conclusión,  $K_1 = K$ .

Sea ahora  $K_1$  una  $\mathbb{Q}$ -subextensión de  $K$  maximal con la condición de que exista un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3 & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & K \\ & \swarrow & \uparrow \\ & & K_1 \end{array}$$

Veamos que  $K_1 = K$ :

Dado  $\bar{a} \in K$ , entonces  $\bar{a}$  es trascendente sobre  $K_1$ , o es algebraico sobre  $K_1$ . Si  $\bar{a}$  es trascendente, entonces sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$  tal que  $\pi'(a) = \bar{a}$ . El morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Luego por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ . Si  $\bar{a}$  es algebraico sobre  $K_1$ , sea  $p(x) \in K_1[x]$  su polinomio mínimo anulador. Sea  $a \in \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$  tal que  $\pi'(a) = \bar{a}$ . Para definir bien el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ ,  $\bar{a} \mapsto a$ , es necesario que  $p(a) = 0$ . Sea  $h \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \subset \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ . Desarrollando por Taylor obtenemos

$$p(a+h) = p(a) + p'(a)h + c \cdot h^2 = p(a) + p'(a)h$$

Observemos que  $\pi'(p(a)) = p(\bar{a}) = 0$ , luego  $p(a) \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ . Además,  $p'(a)$  es invertible, porque  $(p(x), p'(x)) = (1)$  luego  $(p(a), p'(a)) = (1)$  y como  $p(a)$  es nilpotente,  $p'(a)$  es invertible. En conclusión, si escribimos  $h = -p(a)/p'(a)$  entonces  $h \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ ,  $\pi'(a+h) = \bar{a}$  y  $p(a+h) = 0$ . Así pues, cambiando  $a$  por  $a+h$ , tenemos que el morfismo  $K_1(\bar{a}) \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$ ,  $\bar{a} \mapsto a$  está bien definido. Por la maximalidad de  $K_1$ ,  $\bar{a} \in K_1$ .

Así sucesivamente, vamos obteniendo morfismos  $K \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ , que por paso al límite proyectivo define el morfismo  $K \rightarrow \widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$  buscado.

b) Supongamos que  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo de característica  $p > 0$ .

Procedamos del mismo modo que en el apartado a).

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}/\mathfrak{m} \\ & & \parallel \\ & & K \end{array}$$

Sea  $L$  el máximo subcuerpo de  $\pi^{-1}(K) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  con la condición de contener a  $(\pi^{-1}(K))^p$ . Observemos que  $\pi^{-1}(K) = \pi^{-1}(K - 0) \cup \pi^{-1}(0)$ , donde los elementos de  $\pi^{-1}(K - 0)$  son invertibles porque no son nilpotentes, y  $\pi^{-1}(0) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Por tanto,  $(\pi^{-1}(K))^p = \pi^{-1}(K - 0)^p \cup 0$ , que es un cuerpo. Luego el epimorfismo  $\pi: (\pi^{-1}(K))^p \rightarrow K^p$  es un isomorfismo.

Probemos que  $\pi: L \hookrightarrow K$  es un isomorfismo. Dado  $\bar{a} \in K$ , sea  $a \in \pi^{-1}(K)$ , tal que  $\pi(a) = \bar{a}$ . Se verifica que  $a^p \in L$ . Consideremos el epimorfismo

$$L[x]/(x^p - a^p) \rightarrow L[a], x \mapsto a$$

Si  $\sqrt[p]{a^p} \notin L$  entonces  $x^p - a^p$  es irreducible en  $L[x]$ , luego  $L[x]/(x^p - a^p)$  es cuerpo y el epimorfismo es isomorfismo. Contradicción porque  $L$  es máximo y  $L \subset L[a]$ . Si  $\sqrt[p]{a^p} \in L$  entonces  $\pi(\sqrt[p]{a^p}) = \bar{a}$ . Luego  $\pi$  es un isomorfismo.

Tenemos el morfismo  $K \xrightarrow{\pi^{-1}} L \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2$  buscado.

Consideremos ahora, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3 & \xrightarrow{\pi'} & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^2 \\ & & \updownarrow \\ & & K \end{array}$$

De nuevo, sea  $L$  el máximo subcuerpo de  $\pi'^{-1}(K)$  con la condición de contener a  $(\pi'^{-1}(K))^p$ . Observemos que  $\pi'^{-1}(K) = \pi'^{-1}(K - 0) \cup \pi'^{-1}(0)$ , donde los elementos de  $\pi'^{-1}(K - 0)$  son invertibles porque no son nilpotentes, y  $\pi'^{-1}(0) = \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ . Por tanto,  $(\pi'^{-1}(K))^p = \pi'^{-1}(K - 0)^p \cup 0$ , que es un cuerpo. Luego el epimorfismo  $\pi': (\pi'^{-1}(K))^p \rightarrow K^p$  es un isomorfismo.

Probemos que  $\pi': L \hookrightarrow K$  es un isomorfismo. Dado  $\bar{a} \in K$ , sea  $a \in \pi'^{-1}(K)$ , tal que  $\pi'(a) = \bar{a}$ . Se verifica que  $a^p \in L$ . Consideremos el epimorfismo

$$L[x]/(x^p - a^p) \rightarrow L[a], x \mapsto a$$

Si  $\sqrt[p]{a^p} \notin L$  entonces  $x^p - a^p$  es irreducible en  $L[x]$ , luego  $L[x]/(x^p - a^p)$  es cuerpo y el epimorfismo es isomorfismo. Contradicción porque  $L$  es máximo y  $L \subset L[a]$ . Si  $\sqrt[p]{a^p} \in L$  entonces  $\pi'(\sqrt[p]{a^p}) = \bar{a}$ . Luego  $\pi'$  es un isomorfismo.

Tenemos el morfismo  $K \xrightarrow{\pi'^{-1}} L \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^3$  buscado.

Así sucesivamente, vamos obteniendo morfismos  $K \rightarrow \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$ , que por paso al límite proyectivo define el morfismo  $K \rightarrow \widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$  buscado. □

**Corolario 1.4.39.** Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , completo por la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica. Si  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo se verifica un isomorfismo

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$$

*Demostración.* Por el teorema de Cohen, existe una sección  $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathcal{O}$  del cuerpo residual de  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\xi_1, \dots, \xi_n$  un sistema generador de  $\mathfrak{m}$ . El morfismo

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathcal{O}, s(x_1, \dots, x_n) \mapsto s(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

es un epimorfismo porque en los graduados lo es. Por tanto,

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[\xi_1, \dots, \xi_n]]$$

□

## 1.5 Problemas

1. Si  $I$  es un conjunto filtrante creciente e  $i \in I$  es máximo, probar que  $\varinjlim_{j \in I} M_j = M_i$ .
2. Demostrar que todo módulo es el límite inductivo de sus submódulos finitos generados.
3. Probar que todo anillo es límite inductivo de  $\mathbb{Z}$ -álgebras de tipo finito. Probar que todo anillo es límite inductivo de subanillos noetherianos.
4. Sea  $M$  un  $A$ -módulo de presentación finita. Probar  $\text{Hom}_A(M, \varinjlim_n N_n) = \varinjlim_n \text{Hom}_A(M, N_n)$ .
5. Sea  $A$  un anillo noetheriano,  $a \in A$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Probar que  $\varinjlim_n \text{Hom}_A((a^n), M) = M_a$ .
6. Demostrar que el límite inductivo de módulos planos es plano.
7. Probar que un  $\mathbb{Z}$ -módulo es libre de torsión si y sólo si es un  $\mathbb{Z}$ -módulo plano.
8. Sea  $x \in \text{Spec } A$  y  $M$  un  $A$ -módulo. Demostrar que  $M_x = \varinjlim_{\{x \in U_a\}} M_a$ .
9. Sea  $x$  un punto de un espacio topológico  $X$ . Sea  $I$  el conjunto de entornos abiertos de  $x$ , ordenados del siguiente modo:  $U \leq V$  si  $U \subseteq V$ . Sea  $C(U)$  las funciones reales continuas sobre  $U$ , tenemos un sistema inductivo de anillos  $\{C(U)\}$ , donde los morfismos  $C(U) \rightarrow C(V)$  son los de restricción. Probar que  $\varinjlim_{x \in U} C(U)$  es el anillo de gérmenes de funciones continuas en  $x$ .  
Supongamos ahora que  $X$  es un espacio normal ( $T_1$ ). Sea  $\mathfrak{m}_x \subset C(X)$  el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$ . Probar que  $C(X)_x$  es el anillo de gérmenes de funciones continuas de  $X$  en  $x$ .
10. Sea  $N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_n \supseteq \dots$  una sucesión decreciente de  $A$ -submódulos de  $N_0$ . Probar que  $\varprojlim_n N_n = \bigcap_n N_n$ .

11. Sea  $I$  un conjunto filtrante decreciente y  $J \subseteq I$  un subconjunto con la propiedad de que dado  $i \in I$  existe  $j \in J$  tal que  $j \leq i$ . Sea  $\{M_i\}_{i \in I}$  un sistema proyectivo de objetos. Probar que  $\varprojlim_{i \in I} M_i = \varprojlim_{j \in J} M_j$ .
12. Probar que  $\varprojlim_{i \in I} (M_i \times N_i) = (\varprojlim_{i \in I} M_i) \times (\varprojlim_{i \in I} N_i)$ , en la categoría de  $A$ -módulos, por ejemplo.
13. Sea  $\cdots \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$  una sucesión de aplicaciones de entre conjuntos finitos no vacíos. Pruébese que  $\varprojlim_i X_i$  es no vacío.
14. Sea  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  y  $p \in \mathbb{Z}$ . Probar que la condición necesaria y suficiente para que  $p(x)$  tenga una raíz en  $\hat{\mathbb{Z}}_p$  es que tenga alguna raíz en cada  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , para todo  $n > 0$ .
15. Probar que  $\text{Spec}(\varinjlim_i A_i) = \varinjlim_i \text{Spec} A_i$ . Probar que si  $A \hookrightarrow B$  es un morfismo entero (es decir,  $B$  es límite inductivo de subálgebras finitas sobre  $A$ ) entonces la aplicación  $\text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$  es epiyectiva y  $\dim B = \dim A$ .
16. Sea  $M$  un  $A$ -módulo completo y separado por la topología  $I$ -ádica. Probar que si  $GM$  es noetheriano entonces  $M$  es un  $A$ -módulo noetheriano.
17. Sea  $A$  un anillo noetheriano,  $M$  y  $N$   $A$ -módulos finitos generados. Consideremos un ideal  $I \subset A$  y como completaciones las completaciones  $I$ -ádicas. Probar

$$\widehat{\text{Hom}_A(M, N)} = \text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{M}, \hat{N})$$

18. Calcular el inverso de  $1+x$  en  $k[[x]]$ . Probar que el único ideal maximal de  $k[[x]]$  es  $(x)$  ¿Existe la raíz cuadrada de  $1+x$  en  $k[[x]]$ ?
19. Sean  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos completos y separados por la topología  $I$ -ádica. Probar que un morfismo de  $A$ -módulos  $T: M \rightarrow N$  es un epimorfismo si y sólo si el morfismo inducido  $\bar{T}: M/IM \rightarrow N/IN$  es un epimorfismo.
20. Sea  $I$  un ideal de un anillo noetheriano  $A$ , probar que

$$\text{Spec}_{\max} \hat{A} = \text{Spec}_{\max}(A/I)$$

21. Sea  $x \in \text{Spec} A$  un punto cerrado. Probar
- El completado es un concepto local: El completado  $\mathfrak{m}_x$ -ádico de  $A$  coincide con el completado  $\mathfrak{m}_x A_x$ -ádico de  $A_x$ .
  - El cono tangente es un concepto local:  $G_{\mathfrak{m}_x} A = G_{\mathfrak{m}_x A_x} A_x$ .
22. (a) Demostrar que la completación  $I$ -ádica de  $M$  coincide con la completación  $I$ -ádica de  $M_{1+I}$ .  
 (b) Probar que  $\text{Spec}_{\max} A_{1+I} = \text{Spec}_{\max} A/I$ .
23. Supongamos que  $A$  es un anillo noetheriano y  $M$  es finito generado. Probar que el núcleo del morfismo  $M \rightarrow \hat{M}$  coincide con el núcleo del morfismo  $M \rightarrow M_{1+I}$ .

24. Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro,  $I \subset A$  un ideal propio. Probar que  $A$  es separado con la topología  $I$ -ádica.
25. Sea  $A$  un anillo noetheriano. Probar  $\bigcap_{x,n} \mathfrak{m}_x^n = 0$ .
26. Sea  $A$  un anillo noetheriano y  $M$  un  $A$ -módulo finito generado. Probar que  $M = 0$  si y sólo si sus completaciones en todo punto cerrado de  $\text{Spec } A$  son nulas.
27. Sean  $A$  y  $B$  dos  $k$ -álgebras y  $x \in \text{Spec } A = X$ ,  $y \in \text{Spec } B = Y$  dos puntos racionales. Probar que el cono tangente del producto de dos variedades es el producto de los conos tangentes de cada una de ellas

$$C_{(x,y)}(X \times_k Y) = C_x X \times_k C_y Y$$

28. Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito. Dado un ideal  $I \subseteq A$ , diremos que  $\text{codim } I < \infty$  si  $\dim_k A/I < \infty$ . Probar,

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ \text{codim } I < \infty}} A/I = \prod_{x \in \text{Spec}_{\text{max}} A} \hat{A}_x$$

donde  $\hat{A}_x$  es la completación  $\mathfrak{m}_x$ -ádica de  $A$ .



## Capítulo 2

# Teoría de la dimensión local

### 2.1 Introducción

A continuación estudiamos el concepto de dimensión para anillos locales noetherianos, que incluye tanto a los anillos locales de las funciones de variedades algebraicas, como sus completaciones (por ejemplo los anillos de series formales). El concepto de dimensión es esencialmente local.

Geoméricamente decimos que una superficie tiene dimensión 2 porque observamos la cadena de cerrados irreducibles punto, curva, superficie. Cadena que tiene dos eslabones y no podemos conseguir una cadena de cerrados irreducibles con más eslabones. En términos del anillo de las funciones algebraicas de la superficie, estamos diciendo que en este anillo las cadenas de ideales primos más largas son de longitud 2. Por otra parte, para determinar un punto de la superficie como los ceros de  $n$  funciones, necesitaremos de dos funciones algebraicas, por lo menos.

Llamaremos dimensión de un anillo local noetheriano al supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos y veremos que coincide con el número mínimo de parámetros necesarios para determinar el punto cerrado.

En general, el espectro  $\text{Spec } A$  de un anillo noetheriano no es una variedad algebraica, pero se puede definir el espacio tangente a  $\text{Spec } A$  en un punto y éste es una variedad algebraica. Variedad a la que asociaremos el polinomio de Samuel, que nos permitirá desarrollar con éxito la teoría de la dimensión local en anillos locales noetherianos.

Por último aplicaremos la teoría de la dimensión en anillos locales noetherianos a las variedades algebraicas.

### 2.2 Longitud de un módulo

El concepto de longitud de un módulo se corresponde con el concepto de dimensión en espacios vectoriales. Usualmente, se define la dimensión de un espacio vectorial, como el número de vectores de sus bases. Pero esta definición no es la más natural o intuitiva. Si intuimos que  $\mathbb{R}^3$  es de dimensión 3 es porque observamos la cadena de inclusiones irrefinable: punto, recta, plano, espacio. Puede definirse la dimensión de un espacio vectorial, como la longitud de las cadenas irrefinables de subespacios vectoriales. El concepto de base es más elaborado, si bien es muy práctico. En los  $A$ -módulos pueden no existir bases, por tanto, seguiremos el otro punto de vista.

**Definición 2.2.1.** Diremos que un  $A$ -módulo  $M \neq 0$  es simple cuando sus únicos submódulos son los triviales:  $0$  y  $M$ .

Si  $M$  es un  $A$ -módulo simple entonces  $M = \langle m \rangle$ , luego  $M \simeq A/\text{Anul}\langle m \rangle$ . Ahora bien, los submódulos de  $A/\text{Anul}\langle m \rangle$  se corresponden con los ideales de  $A$  que contienen a  $\text{Anul}\langle m \rangle$ . Por tanto,  $M$  es simple si y sólo si  $\text{Anul}\langle m \rangle$  es un ideal maximal, es decir,  $M$  es simple si y sólo si  $M \simeq A/\mathfrak{m}$ , donde  $\mathfrak{m}$  es un ideal maximal de  $A$ .

**Definición 2.2.2.** Diremos que una cadena de submódulos  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$  es irrefinable si los cocientes sucesivos  $M_i/M_{i-1}$  son  $A$ -módulos simples. Diremos que la longitud de esta cadena es  $n$ .

Como los submódulos de  $M_i/M_{i-1}$  se corresponden biyectivamente con los submódulos de  $M_i$  que contienen a  $M_{i-1}$ , el que  $M_i/M_{i-1}$  sea simple equivale a que no existe una cadena  $M_{i-1} \subsetneq N \subsetneq M_i$ . Por tanto, que una cadena de submódulos  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$  sea simple equivale a decir que no podemos añadirle más “eslabones”.

**Definición 2.2.3.** Llamaremos longitud de  $M \neq 0$  a la mínima longitud de todas sus cadenas irrefinables. Si no existe ninguna cadena irrefinable diremos que la longitud de  $M$  es infinita. Denotaremos a la longitud de un módulo  $M$  por  $l(M)$ .

Sobre espacios vectoriales el concepto de longitud coincide con el de dimensión. Si  $M = 0$  diremos que  $l(M) = 0$ .

**Proposición 2.2.4.** *Todas las cadenas irrefinables de un módulo tienen la misma longitud.*

*Demostración.* Si  $l(M) = \infty$  la proposición es obvia. Supongamos que  $l(M) = n < \infty$ .

Dado un submódulo propio  $N \subsetneq M$  se cumple que  $l(N) < l(M)$ : Sea  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$  una cadena irrefinable de longitud mínima de  $M$ . Obviamente,  $l(M/M_1) = n - 1$  y  $N/(N \cap M_1) \hookrightarrow M/M_1$ . Si  $N \cap M_1 = 0$ , entonces  $N \hookrightarrow M/M_1$  y por inducción sobre  $n$ ,  $l(N) < l(M/M_1) = n - 1$ . Si  $N \cap M_1 \neq 0$ , entonces  $N \cap M_1 = M_1$  y  $M_1 \subseteq N$ . Por tanto,  $N/M_1 \subsetneq M/M_1$  y por inducción sobre  $n$   $l(N/M_1) < l(M/M_1) = n - 1$ . Por otra parte,  $l(N) \leq l(N/M_1) + 1$ , por que si  $0 = N'_0 \subset N'_1 \subset \cdots \subset N'_r = N/M_1$  es una cadena irrefinable entonces

$$0 \subset M_1 = \pi^{-1}(N'_0) \subset \pi^{-1}(N'_1) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(N'_r) = N,$$

donde  $\pi: N \rightarrow N/M_1$  es el morfismo de paso al cociente, es una cadena irrefinable de  $N$ . En conclusión,  $l(N) < n - 1 + 1 = n$ .

Así pues, dada una cadena irrefinable  $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_m = M$ , tenemos que  $l(M) > l(M'_{m-1}) > \cdots > l(M'_1)$ , luego  $l(M) \geq m$ . Como  $m \geq n = l(M)$ , tenemos que  $m = n$ . □

Observemos que hemos demostrado que si un módulo es de longitud finita entonces todo submódulo suyo es de longitud finita. Es fácil probar que si un módulo es de longitud finita entonces es finito generado, y por tanto, también todo submódulo será finito generado.

Si un módulo es de longitud finita todo cociente suyo también lo es, pues toda cadena irrefinable define por paso al cociente una cadena irrefinable (eliminando las igualdades que aparezcan en la cadena).

**Proposición 2.2.5.** *La longitud es una función aditiva, es decir, dada una sucesión exacta  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \rightarrow 0$  se cumple que  $l(M) = l(M') + l(M'')$ .*

*Demostración.* Si  $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_{n'} = M'$  y  $0 = M''_0 \subset M''_1 \subset \cdots \subset M''_{n''} = M''$  son cadenas irrefinables de  $M'$  y  $M''$  entonces

$$0 = i(M'_0) \subset i(M'_1) \subset \cdots \subset i(M'_{n'}) = i(M') = \pi^{-1}(M''_0) \subset \pi^{-1}(M''_1) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(M''_{n''}) = M$$

es una cadena irrefinable de  $M$ , luego  $l(M) = n' + n'' = l(M') + l(M'')$ .  $\square$

En particular, si consideramos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & M' \oplus M'' & \rightarrow & M'' \rightarrow 0 \\ & & m' & \mapsto & (m', 0) & & \\ & & & & (m', m'') & \mapsto & m'' \end{array}$$

tenemos que  $l(M' \oplus M'') = l(M') + l(M'')$ .

La sucesión de morfismos de módulos

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow \cdots \rightarrow M_{s-1} \xrightarrow{f_s} M_s \xrightarrow{f_{s+1}} M_{s+1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_n \rightarrow 0 \quad (*)$$

es exacta si y sólo si son exactas las sucesiones  $0 \rightarrow \text{Im } f_s \rightarrow M_s \xrightarrow{f_{s+1}} \text{Im } f_{s+1} \rightarrow 0$ . Así, si la sucesión \* es exacta, tendremos que  $l(\text{Im } f_s) - l(M_s) + l(\text{Im } f_{s+1}) = 0$  y haciendo el sumatorio para todo  $s$  tenemos

$$l(M_0) - l(M_1) + \cdots + (-1)^n l(M_n) = 0$$

**Proposición 2.2.6.**  *$M$  es de longitud finita  $\Leftrightarrow M$  es noetheriano y  $\text{Sop}(M)$  es un número finito de puntos cerrados.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Recordemos que los módulos simples son isomorfos a  $A/\mathfrak{m}$ , siendo  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal. Si  $\mathfrak{m}_x$  es un ideal maximal y  $\mathfrak{p}_{x'}$  es un ideal primo distinto de  $\mathfrak{m}_x$  entonces  $(A/\mathfrak{m}_x)_{x'} = 0$ . Ahora ya, dada una cadena irrefinable

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tenemos que  $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{m}_{x_i}$ , siendo  $\mathfrak{m}_{x_i}$  ideales maximales. Por tanto,  $(M_i/M_{i-1})_x \simeq (A/\mathfrak{m}_{x_i})_x = 0$ , para todo punto  $x \in \text{Spec } A$  distinto de los  $x_i$ . Luego  $M_x = (M_n)_x = \cdots = (M_0)_x = 0$ , para todo punto  $x \in \text{Spec } A$  distinto de los  $x_i$ . En conclusión, el soporte de  $M$  es subconjunto de  $\{x_i\}$ . Además,  $M_i/M_{i-1} \simeq \langle \bar{m}_i \rangle$ , para todo  $i$ . Luego  $M = \langle m_n \rangle + M_{n-1} = \langle m_n \rangle + \langle m_{n-1} \rangle + M_{n-1} = \cdots = \langle m_n, \dots, m_1 \rangle$ . Luego  $M$  es finito generado. Como todo submódulo de  $M$  es de longitud finita entonces es finito generado. En conclusión,  $M$  es noetheriano.

$\Leftarrow$   $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ , luego  $M$  es un cociente de  $\langle m_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle m_n \rangle$ . Si probamos que los  $\langle m_i \rangle$  son de longitud finita entonces  $M$  es de longitud finita. Tenemos que  $\langle m_i \rangle$  son  $A$ -módulos noetherianos, con soporte en un número finito de puntos cerrados, por ser submódulos de  $M$ . En conclusión, podemos suponer que  $M = \langle m \rangle$ . Es decir,  $M = A/I$ . Como  $\text{Spec } A/I = \text{Sop } A/I$  es un número finito de puntos cerrados  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , tenemos que  $A/I = (A/I)_{x_1} \times \cdots \times (A/I)_{x_n}$ . Tenemos que probar que  $(A/I)_{x_i}$  son  $A$ -módulos de longitud finita. Sea  $\mathfrak{m}_{x_i} \subset A$  el ideal maximal correspondiente a  $x_i$ . Tenemos que  $\mathfrak{m}_{x_i} \cdot (A/I)_{x_i}$  es el único ideal primo del anillo noetheriano  $(A/I)_{x_i}$ , por tanto, es nilpotente. Tenemos pues una cadena

$$(A/I)_{x_i} \supseteq \mathfrak{m}_{x_i}(A/I)_{x_i} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_{x_i}^n(A/I)_{x_i} = 0$$

Observemos que  $\mathfrak{m}_{x_i}^i(A/I)_{x_i}/\mathfrak{m}_{x_i}^{i+1}(A/I)_{x_i}$  es un  $A/\mathfrak{m}_{x_i}$  espacio vectorial de dimensión finita, luego son  $A$ -módulos de longitud finita. En conclusión,  $(A/I)_{x_i}$  es un  $A$ -módulo de longitud finita.  $\square$

## 2.3 Función de Hilbert

Sea  $A = R_0[\xi_1, \dots, \xi_r]$  un anillo graduado,  $R_0$  un anillo de longitud finita (de grado cero) y los  $\xi_i$  de grado 1. Por ser  $R_0$  un anillo de longitud finita es noetheriano y por tanto  $A$  también es noetheriano.

Sea  $M = \bigoplus M_n$  un  $A$ -módulo graduado finito generado. Obsérvese que el  $A$ -submódulo de  $M$  generado por  $M_n$  es finito generado, por la noetherianidad de  $M$ . Por tanto,  $M_n$  es un  $R_0$ -módulo de finito generado. Como  $R_0$  es de longitud finita,  $M_n$  es un  $R_0$ -módulo de longitud finita.

**Definición 2.3.1.** Se llama función de Hilbert de  $M$  a  $H_M(n) \stackrel{\text{def}}{=} l(M_n)$ .

**Definición 2.3.2.** Se llama función de Samuel de  $M$  a  $S_M(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} l(M_i)$ .

Observemos que  $\Delta S_M(n) = S_M(n+1) - S_M(n) = H_M(n)$ .

**Proposición 2.3.3.** Sea  $R_0$  un anillo de longitud finita y consideremos el anillo graduado  $R_0[x_1, \dots, x_r]$ . Se cumple que

$$S_{R_0[x_1, \dots, x_r]}(n) = l(R_0) \cdot \binom{n+r-1}{r}$$

*Demostración.* Es un problema de combinatoria: Considérese variables  $\{x_1, \dots, x_r\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$  y escribamos (monomios con las  $x$  ordenadas y las  $y$  ordenadas)

$$y_1 \cdots y_{i_1} x_1 y_{i_1+1} \cdots y_{i_2} x_2 \cdots x_r y_{i_r+1} \cdots y_{n-1} \equiv x_1^{i_1} x_2^{i_2-i_1} \cdots x_r^{i_r-i_{r-1}}$$

El número de todas las combinaciones posibles es  $\binom{n+r-1}{r}$ . Como  $R_0[x_1, \dots, x_r]/(x_1, \dots, x_r)^n = \bigoplus_{i_r < n} R_0 \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2-i_1} \cdots x_r^{i_r-i_{r-1}}$ , obtenemos  $S_{R_0[x_1, \dots, x_r]}(n) = l(R_0) \cdot \binom{n+r-1}{r}$ .  $\square$

**Lema 2.3.4.** Dada una función  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  denotemos por  $\Delta f(n)$  la función  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ . Si  $\Delta f(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$  entonces  $f(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$ .

*Demostración.* Procedamos por inducción sobre el grado de  $\Delta f(n)$ . Sigamos la convención  $\text{gr } 0 = -1$ .

Si  $\text{gr } \Delta f(n) = -1$  para  $n > n_0$ , es decir  $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = 0$  para  $n > n_0$ , entonces  $f(n)$  es constante para  $n > n_0$  y hemos terminado.

Supongamos que  $\text{gr } \Delta f(n) = r$ , para  $n > n_0$ . Es decir,  $f(n) = a_0 n^r + a_1 n^{r-1} + \cdots + a_r$ , para  $n > n_0$ , con  $a_0 \neq 0$ . Se verifica que

$$\begin{aligned} \Delta\left(f - \frac{a_0}{r+1} n^{r+1}\right)(n) &= \Delta f(n) - \frac{a_0}{r+1} ((n+1)^{r+1} - n^{r+1}) \\ &= \Delta f(n) - [a_0 n^r + \text{pol. de grado menor que } r] \end{aligned}$$

Por tanto,  $\Delta\left(f - \frac{a_0}{r+1} n^{r+1}\right)(n)$  es un polinomio de grado menor que  $r$ , para  $n > n_0$ . Luego, por hipótesis de inducción,  $f(n) - \frac{a_0}{r+1} n^{r+1}$  es un polinomio, para  $n > n_0$  y concluimos que  $f(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$ .  $\square$

**Teorema 2.3.5.** *Para  $n$  suficientemente grande, la función de Hilbert es un polinomio en  $n$  (polinomio que llamaremos polinomio de Hilbert).*

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre el número de generadores de  $A$ .

Si  $r = 0$ , como  $M$  es finito generado  $M_n = 0$  para  $n > n_0$ , con  $n_0 \gg 0$ . Por tanto,  $H_M(n) = 0$  para  $n > n_0$  y concluimos.

Supongamos cierto el teorema para  $A = R_0[\xi_1, \dots, \xi_{r-1}]$  y consideremos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \text{Ker}_n \rightarrow M_n \xrightarrow{\xi_r} M_{n+1} \rightarrow \text{Coker}_{n+1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ker} = \bigoplus_n \text{Ker}_n \rightarrow M \xrightarrow{\xi_r} M \rightarrow \text{Coker} = \bigoplus_n \text{Coker}_n \rightarrow 0$$

Como  $\xi_r$  anula a  $\text{Ker}$  y  $\text{Coker}$ , ambos son  $R_0[\xi_1, \dots, \xi_{r-1}]$ -módulos finitos graduados. Por tanto, por hipótesis de inducción

$$\Delta H_M(n) = H_M(n+1) - H_M(n) = H_{\text{Coker}}(n+1) - H_{\text{Ker}}(n)$$

es un polinomio para  $n > n_0$ . Por tanto,  $H_M(n)$  es un polinomio para  $n > n_0$ , por el lema anterior.  $\square$

La función de Samuel es un polinomio para  $n \gg 0$ , ya que  $\Delta S_M(n) = H_M(n)$  (polinomio que denominaremos polinomio de Samuel).

## 2.4 Dimensión en anillos locales noetherianos

Supondremos que  $\mathcal{O}$  es un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , e  $I$  un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario.

Si  $I$  es un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario, entonces  $\text{Spec } \mathcal{O}/I = \{\mathfrak{m}\}$ , y  $l(\mathcal{O}/I) < \infty$ , por 2.2.6. Escribamos  $I = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ . El graduado de  $\mathcal{O}$  por  $I$ ,  $G_I \mathcal{O} = \mathcal{O}/I[\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r]$  es un anillo graduado, con  $\mathcal{O}/I$  de longitud finita y  $\bar{\xi}_i$  de grado 1.

Sea  $M$  un  $\mathcal{O}$ -módulo finito y consideremos en él una filtración  $I$ -estable,  $\{M_n\}$ . Sabemos que el dilatado  $DM$  es un  $D_I \mathcal{O} = \bigoplus I^n$ -módulo finito. Por tanto, el graduado  $GM$  de  $M$  por la filtración es un  $D_I \mathcal{O}$ -módulo finito, luego es un  $G_I \mathcal{O}$ -módulo finito.

Denotaremos

$$S_M(n) = S_{GM}(n) = l(M/M_1) + l(M_1/M_2) + \dots + l(M_{n-1}/M_n) = l(M/M_n)$$

**Proposición 2.4.1.** *El grado y el primer coeficiente de  $S_M(n)$  no depende de la filtración  $I$ -estable considerada en  $M$ .*

*Demostración.* Sean  $\{M_n\}$  y  $\{\bar{M}_n\}$  dos filtraciones  $I$ -estables de  $M$ . Denotemos por  $S_M(n) = l(M/M_n)$  y  $S_{\bar{M}}(n) = l(M/\bar{M}_n)$ . Por 1.4.19 sabemos que existe un  $h$  tal que

$$\begin{aligned} M_{n+h} &\subseteq \bar{M}_n && \text{por tanto, } S_M(n+h) \geq S_{\bar{M}}(n) \\ \bar{M}_{n+h} &\subseteq M_n && \text{por tanto, } S_{\bar{M}}(n+h) \geq S_M(n) \end{aligned}$$

con lo que se concluye la demostración  $\square$

**Proposición 2.4.2.** *El grado de  $S_M(n)$  no depende de la filtración  $I$ -estable considerada en  $M$ , ni del ideal  $\mathfrak{m}$ -primario  $I$ .*

*Demostración.* Consideremos las filtraciones  $\{I^n M\}$  y  $\{\mathfrak{m}^n M\}$ . Basta probar, por la proposición anterior, que  $S_{M,I}(n) = l(M/I^n M)$  y  $S_{M,\mathfrak{m}}(n) = l(M/\mathfrak{m}^n M)$  tienen el mismo grado. Existe un  $k$ , tal que  $\mathfrak{m}^k \subseteq I$ . Por tanto,

$$S_{M,\mathfrak{m}}(kn) = l(M/\mathfrak{m}^{kn} M) \geq l(M/I^n M) = S_{M,I}(n), \quad S_{M,I}(n) = l(M/I^n M) \geq l(M/\mathfrak{m}^n M) = S_{M,\mathfrak{m}}(n)$$

De donde se deduce que  $S_{M,I}(n)$  y  $S_{M,\mathfrak{m}}(n)$  son dos polinomios de igual grado.  $\square$

La siguiente proposición hará las veces del teorema del ideal principal de Krull.

**Proposición 2.4.3.** *Si  $a \in \mathcal{O}$  no es divisor de cero en  $M$ , entonces  $\text{gr } S_{M/aM}(n) < \text{gr } S_M(n)$ .*

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow aM \rightarrow M \xrightarrow{\pi} N = M/aM \rightarrow 0$$

La filtraciones  $\{aM \cap M_n\}$ ,  $\{\pi(M_n)\}$  inducidas en  $aM$  y  $N$  por la filtración  $M_n$   $I$ -estable de  $M$ , son por el teorema de Artin-Rees  $I$ -estables. De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow aM/aM \cap M_n \rightarrow M/M_n \rightarrow N/\pi(M_n) \rightarrow 0$$

se deduce que  $S_{M/aM}(n) = S_N(n) = S_M(n) - S_{aM}(n)$ . Ahora bien, como  $M \stackrel{a}{\cong} aM$  porque  $a$  no es divisor de cero, por 2.4.1, el grado y primer coeficiente de  $S_M(n)$  es igual al de  $S_{aM}(n)$ . Luego  $\text{gr } S_{M/aM}(n) < S_M(n)$ .  $\square$

**Definición 2.4.4.** Llamaremos dimensión de Krull de un anillo al máximo de las longitudes de sus cadenas de ideales primos.

**Ejemplo 2.4.5.**  $\mathbb{Z}$  y  $k[x]$  son anillos de dimensión de Krull 1.  $\mathbb{C}[x, y]$  es un anillo de dimensión de Krull 2.

Como los ideales primos de un anillo  $A$  se corresponden con los cerrados irreducibles de  $\text{Spec } A$ , tenemos que la dimensión de Krull de  $A$  es igual a la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de  $\text{Spec } A$ .

**Definición 2.4.6.** Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Diremos que  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}$  es un sistema de parámetros en  $\mathcal{O}$  si  $(f_1, \dots, f_n)_0 = \{\mathfrak{m}\}$ .

Denotaremos que  $S_{\mathcal{O},I}(n) = l(\mathcal{O}/I^n)$ . Diremos que  $S_{\mathcal{O}}(n) = l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$  es el polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ .

**Teorema 2.4.7.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Los siguientes números son iguales*

1. Dimensión de Krull de  $\mathcal{O}$ .
2. Número mínimo de parámetros de los sistemas de parámetros de  $\mathcal{O}$ .
3. Grado del polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ .

*Demostración.*

a) Dimensión de Krull de  $\mathcal{O} \geq$  Número mínimo de parámetros de los sistemas de parámetros de  $\mathcal{O}$ :

Sea  $f_1$  un elemento no invertible de  $\mathcal{O}$  que no se anule en ningún ideal primo minimal (existe: si  $\{\mathfrak{p}_i\}$  son los ideales primos minimales de  $\mathcal{O}$  y  $g_i$  se anula en todos los  $\mathfrak{p}_j$  salvo en  $\mathfrak{p}_i$ , entonces  $f_1 = \sum_i g_i$ ). Por tanto,  $\dim \mathcal{O} > \dim \mathcal{O}/(f_1)$ . Sea ahora  $f_2$  otro elemento que no se anula en ningún ideal primo minimal de  $\mathcal{O}/(f_1)$ , entonces  $\dim \mathcal{O} > \dim \mathcal{O}/(f_1) > \dim \mathcal{O}/(f_1, f_2)$ . Así sucesivamente, obtenemos una cadena

$$\begin{aligned} 0 &\subset (f_1) \subset (f_1, f_2) \subset \cdots \subset (f_1, \dots, f_n) \subset \cdots \\ \dim \mathcal{O} &> \dim \mathcal{O}/(f_1) > \dim \mathcal{O}/(f_1, f_2) > \cdots > \dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n) > \cdots \end{aligned}$$

que ha de finitizar para un  $n$ , por la noetherianidad de  $\mathcal{O}$ , y lo hará cuando  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n)$  sea de dimensión cero. Por tanto, tenemos que  $(f_1, \dots, f_n)$  es un sistema de parámetros y  $\dim \mathcal{O} \geq n$ .

b) Número mínimo de parámetros de los sistemas de parámetros de  $\mathcal{O} \geq$  grado del polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ :

Sea  $(f_1, \dots, f_r) = I$  un sistema de parámetros. Tenemos que

$$(\mathcal{O}/I)[x_1, \dots, x_r] \longrightarrow G_I \mathcal{O} = \mathcal{O}/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$$

$$x_i \longrightarrow \bar{f}_i$$

es un epimorfismo. Luego  $S_{\mathcal{O}, I}(n) \leq l(\mathcal{O}/I[x_1, \dots, x_r]/(x_1, \dots, x_r)^n) = l(\mathcal{O}/I) \cdot \dim\{\text{polinomios en } r \text{ variables de grado menor que } n\} \stackrel{2.3.3}{=} l(\mathcal{O}/I) \cdot \binom{n+r-1}{r}$ . Observemos que  $\binom{n+r-1}{r}$  es un polinomio de grado  $r$ , luego  $\text{gr } S_{\mathcal{O}, m}(n) = \text{gr } S_{\mathcal{O}, I}(n) \leq r$ . Hemos concluido.

c) Grado del polinomio de Samuel de  $\mathcal{O} \geq$  dimensión de Krull de  $\mathcal{O}$ :

Procedamos por inducción sobre  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n)$ . Si  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) = 0$  entonces  $l(\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n)$  es constante. Por tanto,  $l(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = 0$ , es decir  $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ . Por Nakayama  $\mathfrak{m}^n = 0$ , luego  $\dim \mathcal{O} = 0$ .

Supongamos ya que  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) > 0$ . Sea  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$  una cadena de ideales primos de  $\mathcal{O}$ . Sea  $f \in \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$ . Tenemos

$$\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) \geq \text{gr } S_{\mathcal{O}/\mathfrak{p}_1}(n) \stackrel{2.4.3}{>} \text{gr } S_{\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_1, f)}(n) \geq m - 1$$

donde la última desigualdad es debido a la hipótesis de inducción y a que  $\bar{\mathfrak{p}}_2 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_m$  es una cadena de ideales primos de  $\mathcal{O}/(\mathfrak{p}_1, f)$ . Por tanto,  $\text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) \geq m$  y concluimos.  $\square$

**Ejercicio 2.4.8.** Probar que el anillo local de  $k[x_1, \dots, x_n]$  en el origen es un anillo de dimensión de Krull  $n$ .

**Corolario 2.4.9.** La dimensión de Krull de un anillo local noetheriano es finita y coincide con el grado del polinomio de Samuel.

No es cierto que si un anillo es noetheriano, pero no local, su dimensión de Krull sea finita.

**Corolario 2.4.10 (ideal principal de Krull).** Sea  $f \in \mathcal{O}$  no invertible. Se verifica

$$\dim(f)_0 \geq \dim \mathcal{O} - 1$$

Además, si  $f$  no es divisor de cero entonces

$$\dim(f)_0 = \dim \mathcal{O} - 1$$

*Demostración.* Sea  $(f_1, \dots, f_m)$  un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario de  $\mathcal{O}/(f)$ , generado por el número mínimo de parámetros. Por el teorema anterior  $\dim \mathcal{O}/(f) = m$ . Por otra parte,  $(f, f_1, \dots, f_m)$  es un ideal  $\mathfrak{m}$ -primario de  $\mathcal{O}$ , luego  $\dim \mathcal{O} \leq m+1 = \dim \mathcal{O}/(f) + 1 = \dim (f)_0 + 1$ . Por tanto,  $\dim (f)_0 \geq \dim \mathcal{O} - 1$ .

Si  $f$  no es divisor de cero, entonces  $\dim \mathcal{O}/(f) = \text{gr } S_{\mathcal{O}/(f)}(n) \stackrel{2.4.3}{<} \text{gr } S_{\mathcal{O}}(n) = \dim \mathcal{O}$  y se concluye.  $\square$

**Corolario 2.4.11.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\widehat{\mathcal{O}}$  la completación  $\mathfrak{m}$ -ádica de  $\mathcal{O}$ . Se verifica*

$$\dim \mathcal{O} = \dim \widehat{\mathcal{O}}$$

*Demostración.* Sabemos que  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n = \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$ , por tanto  $S_{\mathcal{O}}(n) = S_{\widehat{\mathcal{O}}}(n)$  y  $\dim \mathcal{O} = \dim \widehat{\mathcal{O}}$ .  $\square$

**Ejercicio 2.4.12.** Probar que  $\dim k[[x_1, \dots, x_n]] = n$ .

## 2.5 Teoría de la dimensión en variedades algebraicas

**Proposición 2.5.1.** *Para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , se cumple que  $\dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} = n$ . En particular,  $\dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} = n$ .*

*Demostración.* Por 1.2.44  $k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x}$  es una  $k$ -extensión finita de  $k$ . Por tanto, el morfismo  $i: k[x_1] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x}$ ,  $i(p(x_1)) = p(x_1)$  tiene de núcleo un ideal primo no nulo  $\text{Ker } i = (p(x_1))$ . Ahora ya,

$$\dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} \stackrel{2.4.10}{=} \dim k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x}/(p(x_1)) + 1 = \dim k[x_1]_{\mathfrak{m}_x}/(p(x_1)) + 1 = (n-1) + 1$$

donde la última igualdad se obtiene por inducción sobre  $n$ .  $\square$

**Teorema 2.5.2.** *La dimensión de Krull de una  $k$ -álgebra  $A$  de tipo finito íntegra es igual al grado de trascendencia de su cuerpo de funciones. “La dimensión de una variedad algebraica íntegra coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de funciones”.*

*Demostración.* Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$ . Luego  $\dim A = n$ . Localizando tenemos el morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x} \hookrightarrow A_{k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x}}$ . Por tanto,  $A_{k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{m}_x}}$  es una  $k(x_1, \dots, x_n)$ -álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo que ha de ser  $A_{A-\{0\}}$ . Por tanto, el grado de trascendencia de  $A_{A-\{0\}}$  es  $n$ .  $\square$

Observemos que  $\dim(A/\text{rad } A) = \dim A$ . Por tanto, para calcular la dimensión de una variedad irreducible  $\text{Spec } A$ , basta calcular la dimensión de  $\text{Spec}(A/\text{rad } A)$ , que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de la variedad.

**Proposición 2.5.3.** *Sea  $X = \text{Spec } A$  una variedad algebraica irreducible y  $x \in X$  un punto cerrado. Se cumple que  $\dim X = \dim A_x$ .*

*Demostración.* Haciendo cociente por los nilpotentes, es decir, por el ideal primo minimal, podemos suponer que  $A$  es un anillo íntegro.

Por el lema de normalización de Noether existe un morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$ . Tenemos que  $\dim X = \dim k[x_1, \dots, x_n] = n$ . Sea  $\mathfrak{m}_y = k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{m}_x$ . Sólo nos falta ver que  $\dim A_x = \dim k[x_1, \dots, x_n]_y = n$ : Dada una cadena de ideales primos  $\mathfrak{m}_x \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_m$ , entonces  $\mathfrak{m}_y \supsetneq k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{p}_m$  es una cadena de ideales primos de inclusiones estrictas, porque en los morfismos finitos las fibras son de dimensión cero. Luego,  $\dim A_x \leq \dim k[x_1, \dots, x_n]_y$ . Dada una cadena de ideales primos  $\mathfrak{m}_y \supsetneq \mathfrak{p}'_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}'_n$ , por el teorema de descenso podemos construir una cadena  $\mathfrak{m}_x \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_m$  de modo que  $\mathfrak{p}'_i = k[x_1, \dots, x_n] \cap \mathfrak{p}_i$ . Luego,  $\dim A_x \geq \dim k[x_1, \dots, x_n]_y$  y  $\dim A_x = \dim k[x_1, \dots, x_n]_y$ .  $\square$

**Teorema 2.5.4 (del ideal principal de Krull).** *Sea  $X = \text{Spec } A$  una variedad algebraica íntegra. Sea  $f \in A$ , no nula y no invertible. Se verifica que la dimensión de toda componente irreducible de  $(f)_0$  es  $\dim X - 1$ .*

*Demostración.* Dada una variedad  $X = \text{Spec } A$  y un punto cerrado  $x \in X$ , llamemos dimensión de  $X$  en  $x$  a  $\dim A_x$ , que coincide con la longitud máxima de las cadenas de cerrados irreducibles de  $X$  que pasan por  $x$ .

Escribamos  $(f)_0 = C_1 \cup \dots \cup C_s$  como unión de componentes irreducibles. Sea  $y \in C_1 - (C_2 \cup \dots \cup C_s)$  un punto cerrado. La dimensión de  $(f)_0$  en  $y$ , coincide con la dimensión de  $C_1$  en  $y$ , que por ser una variedad irreducible, coincide con la dimensión de  $C_1$  (2.5.3). Ahora bien, la dimensión de  $(f)_0$  en  $y$  es igual a  $\dim(A/(f))_y = \dim A_y - 1 = \dim X - 1$ . En conclusión,  $\dim C_1 = \dim X - 1$ .  $\square$

**Definición 2.5.5.** Una cadena de cerrados irreducibles diremos que es maximal si no está incluida en ninguna otra mayor.

**Corolario 2.5.6.** *Toda cadena de cerrados irreducibles maximal de una variedad algebraica irreducible tiene la misma longitud.*

*Demostración.* Sea  $X = \text{Spec } A$  la variedad algebraica irreducible. Sea  $x$  el punto genérico de  $X$ . Obviamente  $X$  es homeomorfo como espacio topológico a  $\text{Spec } A/\mathfrak{p}_x$ . Por tanto, podemos suponer que la variedad algebraica es íntegra. Demostraremos el corolario por inducción sobre la dimensión de Krull.

Sea  $X \supset X_1 \supset \dots \supset X_m$  una cadena de cerrados irreducibles maximal. Sea  $f \in A$  una función no nula, que se anule en  $X_1$ . Sea  $(f)_0 = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$  la descomposición de  $(f)_0$  en cerrados irreducibles, obviamente  $X_1$  es una de las componentes de la descomposición. Por el teorema anterior  $\dim X_1 = \dim X - 1$ , luego por inducción sobre la dimensión  $m - 1 = \dim X_1 = \dim X - 1$ , y por tanto  $m = \dim X$ .  $\square$

**Definición 2.5.7.** Se dice que una variedad algebraica es catenaria si toda cadena de cerrados irreducibles maximal con extremos cualesquiera prefijados tiene la misma longitud.

**Corolario 2.5.8.** *Las variedades algebraicas son catenarias.*

*Demostración.* Sean  $Y \supset Y'$  cerrados irreducibles de una variedad algebraica  $X$ . Sea  $Y' \supset Y'_1 \supset \dots \supset Y'_m$  una cadena de cerrados irreducible maximal de  $Y'$ . Toda cadena de cerrados irreducibles maximal de extremos  $Y, Y'$ , junto con esta cadena, define una cadena maximal de  $Y$  “ampliada”.

Como las cadenas “ampliadas” son todas de la misma longitud, por el corolario anterior aplicado a  $Y$ , concluimos que toda las cadenas maximales de cerrados irreducibles de extremos  $Y, Y'$ , tienen la misma longitud.  $\square$

## 2.6 Problemas

1. Sea  $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n$  una cadena de  $A$ -submódulos de  $M$ . Probar que  $l(M/M_n) = \sum_{i=1}^n l(M_{i-1}/M_i)$ .

2. Sea  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  una  $k$ -álgebra de tipo finito y sea  $\mathcal{O} = A_x$ , donde  $x \in \text{Spec } A$  es un punto cerrado. Probar que si  $M$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo de longitud finita entonces es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita y

$$\dim_k M = l(M) \cdot \dim_k \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$$

3. Sea  $A$  un anillo íntegro y  $f, g \in A$  no nulas. Probar que

$$l_A(A/(fg)) = l_A(A/(f)) + l_A(A/(g))$$

4. Probar que si  $A$  es un anillo con un número finito de elementos, entonces es un anillo noetheriano de dimensión cero.

5. Escribamos el polinomio  $p(x, y) = p_n(x, y) + p_{n+1}(x, y) + \dots + p_m(x, y)$  como suma de polinomios homogéneos  $p_i(x, y)$  de grado  $i$ . Sea  $\mathcal{O} = (k[x, y]/p(x, y))_{x_0}$ , con  $\mathfrak{m}_{x_0} = (x, y)$ . Demostrar que  $G_{\mathfrak{m}_{x_0}} \mathcal{O} = k[x, y]/(p_n(x, y))$ . Calcular el polinomio de Samuel de  $\mathcal{O}$ .

6. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano. Probar que la dimensión de Krull de  $\mathcal{O}$  es igual a la dimensión del cono tangente  $G_{\mathfrak{m}} \mathcal{O} = \bigoplus_n \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$  en el origen (que es el ideal maximal  $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1}$ ).

7. Sea  $A$  un anillo noetheriano. Probar que  $\dim A[x] = 1 + \dim A$  (Obsérvese que si  $\mathfrak{p} \subset A$  es un ideal primo entonces  $\mathfrak{p}A[x]$  es un ideal primo de  $A[x]$ ).

8. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de dimensión de Krull 2. Probar que el conjunto  $\text{Spec } \mathcal{O}$  tiene infinitos puntos.

9. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de dimensión de Krull  $n$  y  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}$  de modo que  $\dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r) = n - r$ . Demostrar que existen  $f_{r+1}, \dots, f_n$  de modo que  $\dim \mathcal{O}/(f_1, \dots, f_n) = 0$ .

10. Calcular la dimensión de Krull de  $\mathbb{C}[[x, y]]_S$ , con  $S = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ .

11. Sea  $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$  un anillo de polinomios de infinitas variables. Sean  $\mathfrak{p}_i = (x_{2^i}, \dots, x_{2^{i+1}-1})$  y  $S = A - \bigcup_i \mathfrak{p}_i$ .

(a) Probar que  $\text{Spec}_{max} A_S = \{\mathfrak{p}_i \cdot A_S\}_i$ .

(b) Probar que toda función no nula de  $A_S$  pertenece a un número finito de ideales maximales.

(c) Probar que  $A_S$  es un anillo noetheriano.

(d) Probar que  $\dim A_S = \infty$ . (Nagata)

12. Sean  $X, Y$  variedades algebraicas. Probar que

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

(Utilícese el Lema de Normalización de Noether).

13. Sean  $Y, Y'$  subvariedades irreducibles de  $\mathbb{A}^n$ . Supongamos que  $Y \cap Y' \neq \emptyset$ . Demuéstrese que

$$\text{codim } Y + \text{codim } Y' \geq \text{codim}(Y \cap Y')$$

14. Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea  $y \in f(X)$  un punto cerrado. Demuéstrese que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim \overline{f(X)}$$

15. Sea  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  un anillo graduado, con  $\text{gr } \xi_i = 1$ . Probar

(a) Si  $\mathfrak{p} \subset A$  es un ideal primo, el ideal generado por los elementos homogéneos de  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo.

(b) Los ideales primos minimales de  $A$  son ideales primos homogéneos.

(c)  $\dim A = \dim A_{\text{or}}$ , donde  $\mathfrak{m}_{\text{or}} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

(d)  $\dim A - 1$  es igual al grado del polinomio  $p(n) = \dim_k[A]_n$ .

16. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de dimensión  $r$ ,  $\{f_1, \dots, f_r\}$  un sistema de parámetros, e  $I$  el ideal generado por éstos. Probar que

$$G_I \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_r]$$

Sea  $\mathcal{O}$  la localización de  $k[x, y]/(xy)$  en el origen. Sea  $I = (\bar{x}) \subset \mathfrak{m} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Probar que

$$G_I \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x]$$

17. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano,  $I = (f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathcal{O}$  un ideal tal que  $\dim \mathcal{O}/I = \dim \mathcal{O} - r$ . Probar que  $G_I \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_r]$ .

18. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano catenario,  $I = (f_1, \dots, f_r) \subseteq \mathcal{O}$  un ideal tal que  $\dim \mathcal{O}/I = \dim \mathcal{O} - r$ . Probar que  $\dim G_I \mathcal{O} = \dim \mathcal{O}$ .



## Capítulo 3

# Anillos locales regulares

### 3.1 Introducción

Los anillos de funciones algebraicas de la cúspide  $y^2 - x^3 = 0$ , el nodo  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ , el cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  son no regulares en el origen y regulares en cualquier otro punto.

El objetivo de este capítulo es caracterizar localmente los anillos de funciones de las variedades algebraicas sin singularidades. Diremos que una variedad algebraica de dimensión  $n$  es regular en un punto si y sólo si existen  $n$  hipersuperficies que se cortan transversalmente en el punto (contando multiplicidades). Esta definición equivaldrá a que el cono tangente a la variedad sea un espacio afín y a que la completación del anillo de funciones algebraicas en el punto sea un anillo de series formales. Daremos también criterios diferenciales que caractericen la regularidad.

Por último, para el problema de la “regularización” de una variedad introduciremos los anillos de valoración. El procedimiento de regularización de las curvas por explosión, se estudiará en el siguiente capítulo.

### 3.2 Anillos locales regulares

**Definición 3.2.1.** Diremos que un anillo  $\mathcal{O}$  local noetheriano de ideal maximal  $\mathfrak{m}$  es regular, si  $\dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . A  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  se le denomina espacio cotangente de Zariski.

En Geometría Diferencial, si  $V$  es una variedad diferenciable,  $x \in V$  y  $\mathfrak{m}_x$  es el ideal de las funciones diferenciables que se anulan en  $x$ , entonces  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = T_x^*V$  es el espacio cotangente a  $V$  en  $x$ . Si bien, el anillo de gérmenes de una variedad diferenciable no es un anillo noetheriano, se cumple que la dimensión de la variedad diferenciable coincide con la dimensión del espacio cotangente en todo punto. En este sentido se puede decir que las variedades diferenciables son regulares en todo punto.

**Definición 3.2.2.** Diremos que  $X = \text{Spec } A$  es regular en  $x \in X$  si  $A_x$  es un anillo local regular.

**Ejemplo 3.2.3.** Los anillos íntegros locales de ideales principales son anillos regulares. Por tanto, las localizaciones de  $\mathbb{Z}$  en sus puntos cerrados son anillos regulares.

Recordemos que dado  $f \in \mathfrak{m}$  decimos que es un parámetro. Observemos que para todo anillo  $\mathcal{O}$  local noetheriano  $\dim \mathcal{O} \leq \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , porque si  $\dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$  y  $f_1, \dots, f_n$  es un sistema de parámetros obtenido por Nakayama, sabemos que  $\dim \mathcal{O} \leq n$ . Por tanto,

$$\mathcal{O} \text{ es regular} \Leftrightarrow \dim \mathcal{O} \geq \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

**Proposición 3.2.4.** *Un anillo  $\mathcal{O}$  local noetheriano de dimensión  $n$ , es regular si y sólo si existe un sistema de parámetros  $f_1, \dots, f_n$  que generan el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{O}$  es un anillo regular entonces  $n = \dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Si  $f_1, \dots, f_n$  es un sistema generador de  $\mathfrak{m}$  obtenido por Nakayama, éste será el sistema de parámetros buscado. Recíprocamente, si  $f_1, \dots, f_n$  es un sistema de parámetros que generan  $\mathfrak{m}$  entonces  $\dim \mathcal{O} \geq \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , luego  $\mathcal{O}$  es regular.  $\square$

Aunque no hayamos definido la multiplicidad de intersección, digamos que esta proposición se interpreta geoméricamente del siguiente modo: “Una variedad algebraica irreducible  $X = \text{Spec } A$  de dimensión  $n$ , es regular en un punto cerrado  $x \in X$  si y sólo si existen  $n$  hipersuperficies,  $f_i = 0$ , que se cortan con multiplicidad 1 en  $x$ ”.

**Proposición 3.2.5.** *El anillo local de  $k[x_1, \dots, x_n]$  en el origen es un anillo regular de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Denotemos  $\mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n)$ . Por 2.5.1,  $\dim k[x_1, \dots, x_n]_x = n$ . Por la proposición anterior,  $k[x_1, \dots, x_n]_x$  es regular.  $\square$

**Ejercicio 3.2.6.** Probar que para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}_x \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , entonces  $k[x_1, \dots, x_n]_x$  es regular. “El espacio afín es regular en todo punto”.

**Teorema 3.2.7.**  *$\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ . “ $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si el cono tangente en el punto cerrado es isomorfo a un espacio afín.”*

*Demostración.* Antes empezar con la demostración, observemos que el graduado de  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$  en el ideal definido por el ideal maximal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$  es isomorfo a  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ . Como por Samuel, la dimensión de un anillo local  $\mathcal{O}$  viene determinada por su graduado  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ , tendremos que la dimensión de Krull de  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$  localizado en el ideal maximal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$ , escribamos simplemente  $\dim G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ , es igual a  $\dim \mathcal{O}$ .

Si  $\mathcal{O}$  es un anillo regular de dimensión  $n$ , existe un sistema de parámetros  $f_1, \dots, f_n$  que genera el ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ . Consideremos el epimorfismo graduado

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n] & \rightarrow & G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots \\ x_i & \mapsto & \bar{f}_i \end{array}$$

Veamos que es un isomorfismo:  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo de dimensión  $n$  en el origen. Si hubiese núcleo, la dimensión del anillo imagen, es decir la de  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ , en el punto definido por el ideal maximal  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3 \oplus \dots$  sería menor que  $n = \dim \mathcal{O}$ . Contradicción.

Recíprocamente, si  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ , entonces  $\dim G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = n$ , luego  $\dim \mathcal{O} = n$ . Además, tenemos también que

$$\dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} (x_1, \dots, x_n)/(x_1, \dots, x_n)^2 = n$$

Luego,  $\dim \mathcal{O} = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  y  $\mathcal{O}$  es regular.  $\square$

**Corolario 3.2.8.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano, de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\widehat{\mathcal{O}}$  el completado  $\mathfrak{m}$ -ádico de  $\mathcal{O}$ . Se cumple que  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $\widehat{\mathcal{O}}$  es regular.*

*Demostración.* El corolario es consecuencia del teorema anterior y de que  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = G_{\widehat{\mathfrak{m}}}\widehat{\mathcal{O}}$ .  $\square$

**Proposición 3.2.9.** *Si  $\mathcal{O}$  es un anillo regular entonces es íntegro.*

*Demostración.* Sean  $f, g \in \mathcal{O}$ . Sea  $\mathfrak{m}$  el ideal maximal de  $\mathcal{O}$ . Recordemos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = 0$ . Por tanto, existen  $r, s \in \mathbb{N}$  de modo que  $f \in \mathfrak{m}^r$ ,  $f \notin \mathfrak{m}^{r+1}$ ,  $g \in \mathfrak{m}^s$  y  $g \notin \mathfrak{m}^{s+1}$ . Es decir,  $\bar{f} \in \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$  y  $\bar{g} \in \mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$  son no nulas.

Si  $\mathcal{O}$  es regular entonces  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$ .  $\mathcal{O}/\mathfrak{m}[x_1, \dots, x_n]$  es un anillo íntegro. Por lo tanto,  $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{fg} \in \mathfrak{m}^{r+s}/\mathfrak{m}^{r+s+1}$  no es nulo. Luego  $f \cdot g$  no es nulo y  $\mathcal{O}$  es íntegro.  $\square$

**Proposición 3.2.10.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , completo por la topología  $\mathfrak{m}$ -ádica. Si  $\mathcal{O}$  contiene un cuerpo se verifica un isomorfismo*

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]]$$

*Demostración.* Por el teorema de Cohen, existe una sección  $\mathcal{O}/\mathfrak{m} \hookrightarrow \mathcal{O}$  del cuerpo residual de  $\mathfrak{m}$ . Sea  $\xi_1, \dots, \xi_n$  un sistema generador de  $\mathfrak{m}$  obtenido por el Lema de Nakayama. El morfismo

$$\mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \mathcal{O}, s(x_1, \dots, x_n) \mapsto s(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

es un isomorfismo porque en los graduados lo es (recuérdese 3.2.7). Por tanto,

$$\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}[[x_1, \dots, x_n]]$$

$\square$

Escribamos  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$  y sea  $f \in \mathfrak{m}_x$ . Denotaremos a  $\bar{f} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$  como  $d_x f$ , y diremos que  $d_x f$  es la diferencial de  $f$  en  $x$ . Por ejemplo, si consideramos  $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{m}_x = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , entonces por desarrollando por Taylor en  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , tenemos que

$$d_x p(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d_x x_1 + \dots + \frac{\partial p}{\partial x_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d_x x_n$$

En el caso de que el anillo  $A$  una  $k$ -álgebra y  $A/\mathfrak{m}_x = k$ , dado  $f \in \mathfrak{m}_x$ , se define  $d_x f = \overline{f - f(x)} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ , donde  $f(x) = \bar{f} \in A/\mathfrak{m}_x = k$ .

**Teorema 3.2.11.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$ . Sea  $I \subset \mathcal{O}$  un ideal.  $\mathcal{O}/I$  es un anillo regular  $\Leftrightarrow I$  está generado por un sistema de parámetros de diferenciales en  $x$  linealmente independientes.*

*Demostración.* Denotemos por  $\bar{\mathfrak{m}}_x$  la clase de  $\mathfrak{m}_x$  en  $\mathcal{O}/I$ .

$\Leftarrow$ ) Sabemos que  $I = (f_1, \dots, f_r)$  de modo que  $\{d_x f_1, \dots, d_x f_r\}$  son linealmente independientes en  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Consideremos la sucesión exacta

$$I \hookrightarrow \mathfrak{m}_x \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$  obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow I/\mathfrak{m}_x I \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2 \rightarrow 0$$

que es exacta por la izquierda, porque  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  es un sistema generador de  $I/\mathfrak{m}_x I$  linealmente independiente en  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . Por tanto,

$$\dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x} \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2 = \dim_{\mathcal{O}/\mathfrak{m}_x} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 - r = \dim \mathcal{O} - r \leq \dim \mathcal{O}/I$$

Luego  $\mathcal{O}/I$  es regular (de dimensión  $\dim \mathcal{O} - r$ ).

$\Rightarrow$ )  $\mathcal{O}/I$  es regular. Escribamos  $\dim \mathcal{O} = n$  y  $\dim \mathcal{O}/I = n - r$ . Consideremos la sucesión exacta

$$I \hookrightarrow \mathfrak{m}_x \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x \rightarrow 0$$

Tensorializando por  $\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$  obtenemos la sucesión exacta

$$I/\mathfrak{m}_x I \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2 \rightarrow 0$$

Sean pues  $f_1, \dots, f_r \in I$ , de modo que  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  sea una base del núcleo del epimorfismo  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow \bar{\mathfrak{m}}_x/\bar{\mathfrak{m}}_x^2$ .

El epimorfismo  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r) \rightarrow \mathcal{O}/I$  es un isomorfismo:  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r)$  es un anillo regular por  $\Leftrightarrow$ , de dimensión  $n - r$ . Si hubiese núcleo, la dimensión de la imagen sería menor que  $n - r$ , porque  $\mathcal{O}/(f_1, \dots, f_r)$  es íntegro por ser un anillo regular. Por tanto, la dimensión de  $\mathcal{O}/I$  sería menor que  $n - r$ , contradicción.

Por tanto,  $I = (f_1, \dots, f_r)$  con  $d_x f_1, \dots, d_x f_r$  linealmente independientes. □

**Ejercicio 3.2.12.** Calcular los puntos regulares de  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$ .

Los anillos locales de la Geometría Diferencial, si bien no son noetherianos, pueden considerarse, si no somos rigurosos, como anillos regulares, pues sus completados son anillos de series formales. En Geometría Diferencial, es conocido que dada una variedad diferenciable  $X$  y  $\{f_1, \dots, f_r\} \in \mathcal{C}^\infty(X)$ , si  $d_x f_1, \dots, d_x f_r$  son linealmente independientes para todo  $x \in \{f_1 = 0, \dots, f_n = 0\}$  entonces  $\{f_1 = 0, \dots, f_n = 0\}$  es una subvariedad diferenciable de  $X$ .

### 3.3 Anillos locales regulares de dimensión 1 y anillos de valoración

Los anillos locales regulares de dimensión cero son los cuerpos. En la teoría de Galois, se ha profundizado en su estudio. Nuestro objetivo es el estudio de los anillos locales regulares de dimensión uno. Los anillos de dimensión uno de la Geometría Algebraica son los anillos de funciones algebraicas de las curvas. En la clasificación de las curvas algebraicas es fundamental el caracterizar los puntos singulares (los puntos no regulares) de las curvas y la regularización o desingularización de éstas. Como veremos, los anillos locales regulares de dimensión uno son los anillos de valoración discreta, y la intersección de los anillos de valoración que contienen a un anillo es su cierre entero, en el caso de anillos de curvas es el anillo de su desingularización.

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano de dimensión 1. Se verifica que  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $\mathcal{O}$  es un anillo de ideales principales.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $\mathcal{O}$  es regular de dimensión 1, su ideal maximal está generado por un parámetro  $t \in \mathfrak{m}$ . Si  $f$  es un elemento no nulo de  $\mathcal{O}$ , entonces  $f = t^n \cdot i$ , con  $i \in \mathcal{O}$  invertible para un  $n \in \mathbb{N}$ . Por tanto  $f\mathcal{O} = t^n \mathcal{O}$ . Dado un ideal  $I$ , tendremos que  $I = t^m \mathcal{O}$  con  $m = \min\{n : f\mathcal{O} = t^n \mathcal{O}, \text{ con } f \in I\}$ .

$\Leftarrow$ ) Tenemos que  $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$ . Luego  $\dim \mathcal{O} \geq \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  y  $\mathcal{O}$  es regular. □

**Definición 3.3.2.** Sea  $\Sigma$  un cuerpo. Una valoración discreta de  $\Sigma$  es una aplicación epiyectiva  $v: \Sigma - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  que verifica

1.  $v(fg) = v(f) + v(g)$ .
2.  $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$

Dado un anillo  $\mathcal{O}$  local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , podemos definir una valoración discreta en  $\Sigma$  (la valoración  $\mathfrak{m}$ -ádica): Dada  $f \in \Sigma$  tenemos que  $f = \frac{a}{b}$ , con  $a, b \in \mathcal{O}$ . Se verifica que  $a \in \mathfrak{m}^n - \mathfrak{m}^{n+1}$  y  $b \in \mathfrak{m}^m - \mathfrak{m}^{m+1}$ . Pues bien, si definimos  $v(f) = n - m$ , es fácil comprobar que  $v$  es una valoración discreta. Además, si  $\dim \mathcal{O} = 1$ ,  $\mathcal{O}$  coincide el subanillo de  $\Sigma$  formado por las  $f \in \Sigma$  de valor mayor o igual que cero.

Recíprocamente, veamos que dada una valoración discreta  $v$  entonces  $\mathcal{O}_v = \{f \in \Sigma : v(f) \geq 0\}$  es un anillo local regular de dimensión 1 de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .

Sea  $v: \Sigma - \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  una valoración. Observemos que  $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$  luego  $v(1) = 0$ . Por tanto,  $0 = v(1) = v(f \cdot f^{-1}) = v(f) + v(f^{-1})$ , luego  $v(f^{-1}) = -v(f)$ .

Cada ideal  $I \subset \mathcal{O}_v$  está generado por un elemento de valor mínimo: Sea  $f \in I$  de valor mínimo, dado  $g \in I$  tenemos que  $v(g) \geq v(f)$  luego  $v(g/f) = v(g) - v(f) \geq 0$ . Luego  $g/f \in \mathcal{O}_v$  y  $g = g/f \cdot f$ , es decir  $I = (f)$ .

Así pues,  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de ideales principales, luego noetheriano.  $\mathcal{O}_v$  es un anillo local que no es un cuerpo, porque los invertibles son precisamente  $\{f \in \mathcal{O}_v : v(f) = 0\}$  y el ideal maximal es  $\mathfrak{p}_v = \{f \in \mathcal{O}_v : v(f) > 0\}$ . Por tanto,  $\mathcal{O}_v$  es un anillo local regular de dimensión 1. Además, para toda  $f \in \Sigma$  o bien  $f \in \mathcal{O}_v$  o bien  $f^{-1} \in \mathcal{O}_v$ , es decir,  $v(f) \geq 0$  o  $v(f^{-1}) = -v(f) \geq 0$  (esta propiedad junto con la noetherianidad va a caracterizar los anillos de valoración discreta  $\mathcal{O}_v$ ). Por tanto, el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_v$  es  $\Sigma$ .

Hemos obtenido la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.3.** *La correspondencia que asigna a cada valoración discreta  $v$  de  $\Sigma$  el anillo  $\mathcal{O}_v = \{f \in \Sigma : v(f) \geq 0\}$  es una correspondencia biunívoca entre el conjunto de valoraciones discretas y los subanillos locales regulares de dimensión 1 de  $\Sigma$  de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .*

Dada una valoración discreta  $v$  diremos que  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración discreta.

Al ideal maximal se le denota  $\mathfrak{p}_v$  y se le denomina el ideal de valoración.

**Definición 3.3.4.** Un morfismo  $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}'$  inyectivo entre anillos locales de ideales maximales  $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$  se dice que es dominante si  $\mathfrak{m}'$  contiene a  $\mathfrak{m}$ , es decir, si  $\mathfrak{m}' \cap \mathcal{O} = \mathfrak{m}$ .

Si  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración discreta,  $\mathcal{O}'$  un anillo local incluido en el cuerpo de fracciones de  $\mathcal{O}_v$  que contiene a  $\mathcal{O}_v$ , de modo que la inclusión  $\mathcal{O}_v \hookrightarrow \mathcal{O}'$  sea un morfismo dominante, entonces  $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_v$ : Dado  $f \in \mathcal{O}' - \mathcal{O}_v$ , entonces  $v(f) < 0$ , luego  $v(f^{-1}) > 0$  y  $f^{-1} \in \mathfrak{p}_v$ . Por tanto,  $f^{-1} \in \mathcal{O}'$  y pertenece al ideal maximal de  $\mathcal{O}'$ , lo que es contradictorio, pues es invertible en  $\mathcal{O}'$ .

## 3.4 Cierre entero y anillos de valoración

El objetivo principal del resto del curso es el estudio de la desingularización de las curvas. Resulta que la desingularización  $\bar{C}$  de una curva  $C$  es un morfismo  $\bar{C} \rightarrow C$  finito y birracional (las fibras son finitas y en un abierto es isomorfismo) y  $\bar{C}$  no admite a su vez tales morfismos (salvo los isomorfismos). Es decir, si escribimos  $C = \text{Spec } A$  y  $\bar{C} = \text{Spec } \bar{A}$ , resulta que  $A \rightarrow \bar{A}$  es un morfismo finito y birracional y  $\bar{A}$  no admite tales morfismos (salvo los isomorfismos). Como veremos los anillos de valoración están caracterizados por no admitir morfismos birracionales “dominantes” y  $\bar{A}$  coincide con la intersección de los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de  $A$  que contienen a  $A$ .

**Definición 3.4.1.** Diremos que un anillo  $A$  íntegro, es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ , si cumple que si una función  $f \in \Sigma$  es entera sobre  $A$  entonces  $f \in A$ . También se dice que  $A$  es normal.

Sea  $A \hookrightarrow B$  un morfismo de anillos. Llamaremos cierre entero de  $A$  en  $B$  al subanillo de  $B$  formado por todos los elementos de  $B$  enteros sobre  $A$ .

Dejamos que el lector pruebe que el cierre entero de un anillo íntegro en su cuerpo de fracciones es un anillo íntegramente cerrado.

**Proposición 3.4.2.** *Los dominios de factorización única son íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones.*

*Demostración.* Sea  $A$  un dominio de factorización única y  $\Sigma$  su cuerpo de fracciones. Sea  $\frac{a}{b} \in \Sigma$  una fracción de modo que  $b$  sea primo con  $a$ . Si  $\frac{a}{b}$  es entero sobre  $A$  verifica una relación

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Multiplicando por  $b^n$  tendremos  $a^n + \dot{b} = 0$ . Luego, como  $b$  es primo con  $a$ , habrá de ser invertible y  $a/b \in A$ . En conclusión, los únicos elementos enteros de  $\Sigma$  sobre  $A$  son los de  $A$ . □

**Ejemplo 3.4.3.**  $\mathbb{Z}, k[x], k[x_1, \dots, x_n]$  son anillos íntegramente cerrados en sus cuerpos de fracciones.

**Proposición 3.4.4.** *Los anillos de valoración discreta son íntegramente cerrados en su cuerpo de fracciones.*

*Demostración.* Los anillos de valoración discreta son dominios de ideales principales (locales) luego dominios de factorización única. □

**Proposición 3.4.5.** *Un anillo  $A$  íntegro. El cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones conmuta con localizaciones. Por tanto,  $A$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones si y sólo si es localmente íntegramente cerrado.*

*Demostración.* Sea  $S \subseteq A$  un sistema multiplicativamente cerrado.  $f \in \Sigma = A_{A-\{0\}}$  entero sobre  $A_S$ . Por tanto, existe una relación entera

$$f^n + a_1/s_1 \cdot f^{n-1} + \dots + a_n/s_n = 0 \quad \text{con } a_i \in A \text{ y } s_i \in S$$

Sea  $t = s_1 \cdots s_n$  (luego  $t \in S$ ). Multiplicando la relación anterior por  $t^n$  obtenemos una relación entera con coeficientes en  $A$  de  $tf$ , luego  $tf$  pertenece al cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  y  $f \in \bar{A}_S$ .

Si  $f \in \bar{A}_S$  es fácil probar que es entero sobre  $A_S$ .

Por último,  $A = \bar{A} \iff A_x = \bar{A}_x = \overline{A_x}$ , para todo  $x \in \text{Spec } A$ . □

Si consideramos el nodo  $C \equiv y^2 - x^2 + x^3 = 0$  y consideramos la curva  $\tilde{C}$  que se obtiene de “despegar” las dos ramas y el morfismo natural  $\tilde{C} \rightarrow C$  “pegar”, resulta que este morfismo fuera del nodo es isomorfismo (birrational) y es un morfismo finito. Parece claro intuitivamente que para las curvas regulares en todo punto, no existen más morfismos birracionales finitos que los isomorfismos. En términos matemáticos precisos:

**Teorema 3.4.6.** *Sea  $\mathcal{O}$  un anillo íntegro local noetheriano de dimensión 1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $\mathcal{O}$  es regular.
2.  $\mathcal{O}$  es un anillo de valoración.
3.  $\mathcal{O}$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ .

*Demostración.* Sólo nos falta probar  $(3 \Rightarrow 1)$ .

Sea  $f$  un elemento no nulo del ideal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $\mathcal{O}$ . Como  $\mathfrak{m}$  es el ideal primario asociado a la descomposición primaria de  $(f)$ , existe un  $g \in \mathcal{O}$  de modo que  $((f) : (g)) = \mathfrak{m}$ . Por tanto,  $g/f \cdot \mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$ . Si  $g/f \cdot \mathfrak{m} = \mathcal{O}$ ,  $\mathfrak{m}$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo principal y  $\mathcal{O}$  un anillo regular. Si  $g/f \cdot \mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}$ , entonces  $\frac{g}{f} \cdot$  es un endomorfismo de  $\mathfrak{m}$ , que ha de satisfacer el correspondiente polinomio característico. Luego  $\frac{g}{f}$  es entero sobre  $\mathcal{O}$ , así pues  $\frac{g}{f} \in \mathcal{O}$  y  $((f) : (g)) = \mathcal{O}$ , contradicción.  $\square$

**Definición 3.4.7.** Un anillo  $A$  se dice que es un dominio de Dedekind si es noetheriano de dimensión 1 e íntegramente cerrado.

**Proposición 3.4.8.** *Si  $A$  es un dominio de Dedekind e  $I \subset A$  un ideal no nulo, entonces  $I$  se escribe de modo único como producto de ideales primos.*

*Demostración.* Sean  $\{x_1, \dots, x_m\} = (I)_0$ . Sabemos por el teorema y lema anteriores que  $A_{x_i}$  es un anillo de ideales principales. Por tanto,  $I_{x_i} = \mathfrak{p}_{x_i}^{n_i} A_{x_i}$ , para cierto  $n_i \in \mathbb{N}$  único. El ideal

$$\mathfrak{p}_{x_1}^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_{x_m}^{n_m}$$

es igual localmente a  $I$ , luego son iguales globalmente. Evidentemente los exponentes  $n_i$  están determinados porque lo están al localizar.  $\square$

Sea  $\mathfrak{p}_x$  un ideal primo de  $A$ . Denotemos  $\mathfrak{p}_{x,n}$  el ideal  $\mathfrak{p}_x$ -primario que al localizar en  $x$  es igual a  $\mathfrak{p}_x^n$ , es decir, “el ideal  $\mathfrak{p}_x$ -primario de funciones cuyo desarrollo de Taylor hasta orden  $n$  en  $x$  es nulo”.

**Proposición 3.4.9.** *Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro.  $A$  es un anillo normal si y sólo si todo ideal principal (propio) es intersección, sin componentes sumergidas, de un número finito de primarios  $\mathfrak{p}_{x,n_x}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es un anillo normal.

Sea  $\mathfrak{p}_x$  un primo asociado a  $(a) \subset A$ . Veamos que no es una componente sumergida. Podemos suponer que  $A$  es local de ideal maximal  $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{m}$ . Sabemos que existe  $b \in A$  tal que  $(a : b) = \mathfrak{m}$ . Por tanto  $\frac{b}{a} \cdot \mathfrak{m} \subset A$ . Si  $\frac{b}{a} \cdot \mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}$ , entonces  $\frac{b}{a}$  es entero sobre  $A$ , luego  $\frac{b}{a} \in A$  y  $(a : b) = A$ , contradicción. Si  $\frac{b}{a} \cdot \mathfrak{m} = A$ , entonces  $\mathfrak{m}$  es un  $A$ -módulo isomorfo a  $A$ , luego es un ideal principal,  $\dim A = 1$  y  $\mathfrak{m}$  no es una componente sumergida de  $A$ . Además, hemos probado que  $A_x$  es un anillo regular de dimensión 1.

Si  $(a) = \mathfrak{q}_{x_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{x_n}$  es una descomposición primaria de  $(a)$ . Tenemos que  $(a)_{x_i} = \mathfrak{q}_{x_i} \cdot A_{x_i} = \mathfrak{p}_{x_i}^{n_i} \cdot A_{x_i}$ , para cierto  $n_i$ , luego  $\mathfrak{q}_{x_i} = \mathfrak{p}_{x_i, n_i}$ .

Sólo nos falta probar el recíproco. Consideremos sólo los ideales primos  $\mathfrak{p}_x$  asociados a las descomposiciones primarias de los ideales principales.  $A_x$  es un anillo regular de dimensión 1, pues dado  $a \in A$  tal que  $a \in \mathfrak{p}_x \cdot A_x$ ,  $a \notin \mathfrak{p}_x^2 \cdot A_x$ , tenemos que  $(a)_x = \mathfrak{p}_x \cdot A_x$ .  $A = \bigcap_x A_x$ : Sea  $a/b \in \bigcap_x A_x$  y escribamos  $(a) = \mathfrak{p}_{x_1, n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{x_r, n_r}$  y  $(b) = \mathfrak{p}_{x_1, m_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{x_r, m_r}$ , con  $n_i, m_i \geq 0$ . Como  $a/b \in A_{x_i}$  entonces  $n_i \geq m_i$ , para todo  $i$ , luego  $(b) \subset (a)$  y  $a/b \in A$ . Por último, como  $A$  es intersección de anillos íntegramente cerrados entonces es íntegramente cerrado.  $\square$

**Teorema 3.4.10.** *Sea  $A$  un anillo íntegro y  $\Sigma$  un cuerpo que contiene a  $A$ . Supongamos que el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma$ ,  $\bar{A}$ , es un anillo noetheriano. Entonces*

$$\bar{A} = \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v$$

donde  $\mathcal{O}_v$  son subanillos de valoración de  $\Sigma$ .

*Demostración.* En la demostración de la proposición anterior hemos probado que  $\bar{A}$  es la intersección de los localizaciones  $\bar{A}_x$  ( $\dim \bar{A}_x = 1$ ), que son anillos de valoración discreta. Por tanto, las inclusiones

$$\bar{A} \subseteq \bigcap_{A \subseteq \mathcal{O}_v} \mathcal{O}_v \subseteq \bigcap_{\dim \bar{A}_x=1} \bar{A}_x = \bar{A}$$

son igualdades. □

### 3.5 Finitud del cierre entero

**Lema 3.5.1.** *Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro, íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  una extensión finita separable de cuerpos. Entonces el cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  es un  $A$ -módulo finito.*

*Demostración.*  $\bar{\Sigma}$  es el cuerpo de fracciones de  $\bar{A}$ :  $\bar{\Sigma} = \overline{\bar{A}_{A-\{0\}}} = \bar{A}_{A-\{0\}}$

Consideremos en  $\bar{\Sigma}$  la métrica  $T_2$  de la traza,  $T_2(f, g) = \text{tr}(f \cdot g)$ .

Recordemos que  $\text{tr}(h)$  es la traza de la homotecia multiplicar por  $h$  en  $\bar{\Sigma}$ , que  $\text{tr}(h) = \sum_{g \in G} g(h)$ ,

donde  $G = \text{Hom}_{k\text{-álgebra}}(\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma})$  y  $\bar{\Sigma}$  es la envolvente de Galois de  $\bar{\Sigma}$ . Recordemos también que  $\bar{\Sigma}$  es separable si y sólo si  $T_2$  es no singular.

Sea  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \bar{A}$  una base del  $\Sigma$ -espacio vectorial  $\bar{\Sigma}$ . Sea  $w_1, \dots, w_n \in \bar{\Sigma}^*$  la base dual de  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ . A través del isomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} &\xrightarrow{iT_2} \bar{\Sigma}^* = \text{Hom}_{\Sigma}(\bar{\Sigma}, \Sigma) \\ h &\mapsto iT_2: h' \mapsto T_2(h, h') = \text{tr}(h \cdot h') \end{aligned}$$

se verifica que  $iT_2: \bar{A} \hookrightarrow Aw_1 + \dots + Aw_n$ : Dado  $h \in \bar{A}$ , escribamos  $iT_2(h) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$ , con  $\lambda_i \in \Sigma$ . Tenemos que ver que  $\lambda_i \in A$ . Se tiene que

$$\lambda_i = iT_2(h)(\bar{a}_i) = \text{tr}(h \cdot \bar{a}_i) = \sum_{g \in G} g(h \cdot \bar{a}_i)$$

Ahora bien,  $h \cdot \bar{a}_i \in \bar{A}$ , luego  $\lambda_i = \sum_{g \in G} g(h \cdot \bar{a}_i)$  es entero sobre  $A$ . Recordemos que  $\lambda_i \in \Sigma$  y  $A$  es íntegramente cerrado, luego  $\lambda_i \in A$ .

En conclusión,  $\bar{A}$  está incluido en un  $A$ -módulo finito, luego por la noetherianidad de  $A$ , es un  $A$ -módulo finito. □

**Ejercicio 3.5.2.** Probar que  $\mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}]$  no es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.

**Ejercicio 3.5.3.** Demostrar que el cierre entero de  $\mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}]$  en  $\mathbb{Q}[\sqrt[2]{5}]$  es finito sobre  $\mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}]$ . (Pista:  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt[2]{5}]$  es finito y  $\mathbb{Z}$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones).

**Teorema 3.5.4.** *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  una extensión finita de cuerpos. Entonces el cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  es un  $A$ -módulo finito, de cuerpo de fracciones  $\bar{\Sigma}$ .*

*Demostración.* Sea por el lema de normalización de Noether un morfismo finito  $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$ . Como el cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  coincide con el cierre entero de  $k[x_1, \dots, x_n]$  en  $\bar{\Sigma}$ , podemos suponer que  $A = k[x_1, \dots, x_n]$ .

Sea  $\bar{\Sigma}$  la envolvente normal de  $\Sigma$ . El cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  contiene a  $\bar{A}$ . Luego si demostramos que el cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}$  es un  $A$ -módulo finito tendremos que  $\bar{A}$  también lo es. Así pues, podemos suponer que  $\bar{\Sigma}$  es una extensión normal de  $\Sigma$ .

Sea  $G$  el grupo de Galois de  $\bar{\Sigma}$ . Sea  $\bar{\Sigma}^G$  los elementos de  $\bar{\Sigma}$  invariantes por  $G$ . Denotemos por  $A'$  al cierre entero de  $A$  en  $\bar{\Sigma}^G$ .  $\bar{A}$  coincide con el cierre entero de  $A'$  en  $\bar{\Sigma}$ , luego  $\bar{A}$  es un  $A'$ -módulo finito por el lema anterior, pues  $\bar{\Sigma}^G \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  es una extensión separable (de Galois). Así pues, para demostrar que  $\bar{A}$  es un  $A$ -módulo finito basta ver que  $A'$  es un  $A$ -módulo finito. Observemos que  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}^G$  es un morfismo puramente inseparable.

En conclusión, podemos suponer que  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  y que  $\Sigma \hookrightarrow \bar{\Sigma}$  es una extensión finita puramente inseparable de cuerpos.

Sea  $\text{car } k = p > 0$  y escribamos  $\bar{\Sigma} = \Sigma[\xi_1, \dots, \xi_r]$ . Existe  $m \gg 0$  de modo que  $\xi_i^{p^m} \in \Sigma = k(x_1, \dots, x_n)$ , para todo  $i$ . Escribamos  $\xi_i^{p^m} = p_i/q_i$ , con  $p_i = \sum_i \lambda_i x^i \in k[x_1, \dots, x_n]$  y  $q_i = \sum_i \mu_i x^i \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Sea  $k' = k(\sqrt[p^m]{\lambda_i}, \sqrt[p^m]{\mu_i})$  y  $\Sigma' = k'(\sqrt[p^m]{x_1}, \dots, \sqrt[p^m]{x_n})$ . Se verifica que  $\xi_i = \sqrt[p^m]{p_i/q_i} \in \Sigma'$ , luego  $\bar{\Sigma} \subseteq \Sigma'$ . De nuevo, podemos suponer para demostrar el teorema que  $\bar{\Sigma} = \Sigma'$ . Ahora bien, el cierre entero  $k[x_1, \dots, x_n]$  en  $\Sigma'$  es  $k'[\sqrt[p^m]{x_1}, \dots, \sqrt[p^m]{x_n}]$ , pues  $k'[\sqrt[p^m]{x_1}, \dots, \sqrt[p^m]{x_n}]$  es un  $k[x_1, \dots, x_n]$ -módulo finito y es íntegramente cerrado (porque es un anillo de polinomios). Hemos concluido.  $\square$

**Definición 3.5.5.** Diremos que  $\text{Spec } A$  es una curva íntegra afín si  $A$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito íntegra de dimensión 1.

**Ejemplo 3.5.6.** La recta afín  $\mathbb{A}_1 = \text{Spec } k[x]$ , la circunferencia  $\text{Spec } k[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ .

Los cerrados propios de la topología de Zariski de una curva íntegra son los conjuntos finitos de puntos cerrados. El punto genérico es el único punto denso.

**Definición 3.5.7.** Diremos que un punto cerrado  $x \in \text{Spec } A$  es no singular si  $A_x$  es un anillo regular. Diremos que es singular si  $A_x$  no es regular.

**Ejemplo 3.5.8.**  $\text{Spec } k[x, y]/(y^2 - x^3)$  tiene un único punto singular, el origen.

**Teorema 3.5.9.** *El número de puntos singulares de una curva íntegra es finito.*

*Demostración.* Sea  $C = \text{Spec } A$  la curva íntegra y  $\Sigma$  el cuerpo de fracciones de  $A$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma$ , que como sabemos, es un  $A$ -módulo finito, de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \rightarrow \bar{A} \rightarrow \bar{A}/A \rightarrow 0$$

Localizando en el punto genérico de la curva, tenemos que  $\bar{A}/A$  es cero. Luego  $\bar{A}/A$  es cero al localizar en todos los puntos salvo en un número finito de puntos cerrados. Por tanto,  $A = \bar{A}$  al localizar en todos los puntos salvo un número finito de puntos cerrados. Por el lema 3.4.5, dado  $x \in \text{Spec } A$ ,  $A_x = \bar{A}_x$  si y sólo si  $A_x$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones, es decir si y sólo si  $A_x$

es regular, es decir, si y sólo si  $x$  es no singular. En conclusión, los puntos singulares de  $C = \text{Spec } A$  coinciden con los puntos del soporte de  $\bar{A}/A$ , que es un número finito de puntos.  $\square$

### 3.6 Problemas

1. Calcular el polinomio de Samuel de un anillo local regular de dimensión 2.
2. Probar que un anillo local noetheriano  $\mathcal{O}$  es un anillo regular de dimensión  $r$  si y sólo si  $S_{\mathcal{O}}(n) = \binom{n+r-1}{r}$ . Para la suficiencia seguir los pasos:
  - (a)  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$  es un anillo regular en el origen.
  - (b) Si  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  es una  $k$ -álgebra y  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $\bar{k}$  es el cierre algebraico de  $k$ , probar que  $A$  es regular en  $\mathfrak{m}_x$  si y sólo si  $A \otimes_k \bar{k}$  es regular en  $\mathfrak{m}_x \otimes_k \bar{k}$ .
  - (c) Si  $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$  es una  $k$ -álgebra graduada, con  $\text{gr } \xi_i = 1$  y  $k$  con infinitos elementos, demostrar que existe un morfismo graduado finito  $k[x_1, \dots, x_r] \hookrightarrow A$ .
  - (d) Probar que el morfismo anterior es isomorfismo si y sólo si  $S_A(n) = \binom{n+r-1}{r}$ .
3. Sea  $\mathcal{O}$  un anillo local noetheriano, e  $I = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathcal{O}$  un ideal tal que  $\mathcal{O}/I$  es un anillo regular de dimensión de Krull  $\dim \mathcal{O} - r$ . Probar que  $\mathcal{O}$  es un anillo regular.
4. Probar que la localización de  $\mathbb{Z}[x]$  en cualquier punto es un anillo regular.
5. Probar que un anillo noetheriano  $A$  es regular en todo punto si y sólo si  $A[x]$  es regular en todo punto.
6. Calcular los puntos de  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$  en los que no es regular.
7. Sea  $\mathfrak{m}_x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathcal{O} = (k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r))_x$ . Supongamos que  $\dim \mathcal{O} = n - r$ . Probar que  $\mathcal{O}$  es regular si y sólo si  $\text{rg}(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}(0)) = r$ .
8. Sean  $X$  e  $Y$  dos  $k$ -variedades algebraicas y  $x \in X$  e  $y \in Y$  dos puntos racionales regulares. Probar que  $X \times_k Y$  es regular en  $(x, y)$ .
9. Sea  $A$  un anillo incluido en un cuerpo  $\Sigma$ . Probar que  $f \in \Sigma$  es entero sobre  $A$  si y sólo si es entero sobre  $A[f^{-1}]$ .
10. Calcular los anillos de valoración de  $\mathbb{Q}$ .
11. Calcular los anillos de valoración de  $\mathbb{C}(x)$ , que contengan a  $\mathbb{C}$ .
12. Sea  $\mathcal{O}_v$  un anillo de valoración discreta de  $\mathbb{C}(x, y)$  trivial sobre  $\mathbb{C}$ .
  - (a) Demostrar que  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x, y]$ , o a  $\mathbb{C}[\frac{1}{x}, \frac{y}{x}]$ , o a  $\mathbb{C}[\frac{1}{y}, \frac{x}{y}]$ .
  - (b) Si  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x, y]$  y  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{C}[x, y] = \mathfrak{p}_x$  es una curva, demostrar que  $\mathcal{O}_v = \mathbb{C}[x, y]_x$ .
  - (c) Si  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x, y]$  y  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{C}[x, y] = \mathfrak{m}_x$  es un ideal maximal, por ejemplo  $\mathfrak{m}_x = (x, y)$ , demostrar que  $\mathcal{O}_v$  contiene a  $\mathbb{C}[x_1, y_1]$  con  $x_1 = x$ ,  $y_1 = \frac{y}{x}$  o  $x_1 = \frac{x}{y}$ ,  $y_1 = y$ .

- (d) Con las notaciones obvias a partir del apartado anterior. Supongamos que  $\mathfrak{p}_v \cap \mathbb{C}[x_n, y_n]$  es un ideal maximal para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Demostrar que existe un  $m \in \mathbb{N}$ , de modo que  $v(x_m)$  (o  $v(y_m)$ ) es mínimo entre todos los  $v(x_n), v(y_n)$ . Demostrar que  $\widehat{\mathcal{O}}_v = \varprojlim_i \mathcal{O}_v / (\mathfrak{p}_v^i) = \mathbb{C}[[x_m]]$  y que por tanto  $\mathcal{O}_v / \mathfrak{p}_v = \mathbb{C}$ .
13. Sea  $A$  una  $k$ -álgebra de tipo finito de dimensión de Krull 1, íntegra de cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en  $\Sigma$ . Probar que el conjunto de anillos de valoración discreta de  $\Sigma$  que contienen a  $A$  es biyectivo con  $\text{Spec } \bar{A}$ .
14. Pruébese que el anillo local de  $k[x, y]$  en el origen es íntegramente cerrado pero no es un anillo de valoración.
15. Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro de dimensión 1. Sea  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones. Dado  $a \in A$  no nulo, probar que  $l_A(A/aA) \geq l_A(\bar{A}/a\bar{A})$ . Probar que  $\bar{A}$  es un anillo noetheriano de dimensión 1.
16. Sea  $A$  un anillo íntegro y  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones.
- Si  $0 \neq I \subset A$  es un ideal, definir inclusiones naturales,  $A \hookrightarrow \text{Hom}_A(I, I) \hookrightarrow \bar{A}$ .
  - Si  $0 \neq I \subset A$  es un ideal radical, probar que  $\text{Hom}_A(I, A) \cap \bar{A} = \text{Hom}_A(I, I)$ .
17. Sea  $A$  un anillo noetheriano íntegro y  $\bar{A}$  el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones. Sea  $Y \subset \text{Spec } A$  el conjunto de los puntos  $x$ , tales que  $A_x$  no sea íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones. Sea  $I$  un ideal radical no nulo que se anule en todo  $Y$ .
- Dada  $h = \frac{h}{g} \in \bar{A}$ , probar que  $(\text{Anul}(hA/(hA \cap A)))_0 = \{x \in \text{Spec } A : h \notin A_x\} \subset Y$ .
  - Probar que existe  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $I^n \subset \text{Anul}(hA/(hA \cap A))$ .
  - Probar que si  $A = \text{Hom}_A(I, I)$  entonces  $A$  es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones.



## Capítulo 4

# Desingularización de curvas

### 4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos las singularidades de una curva. Probaremos que toda curva es birracional a una curva sin puntos singulares. Estudiaremos el proceso denominado de explosión que nos permitirá desingularizar las curvas. Definiremos la multiplicidad de una variedad en un punto. Calcularemos la multiplicidad de intersección de una curva y una hipersuperficie en un punto. Veremos que el número de ramas analíticas de una curva en un punto coincide con el número de puntos en los que desingulariza la curva en el punto. Por último, en el caso de una única rama introduciremos el desarrollo en serie de Puiseux, que parametriza analíticamente la curva.

Fuera del estudio local de las variedades, probaremos el teorema de Bézout, que dice que dos curvas planas proyectivas de grados  $n$  y  $m$  se cortan en  $n \cdot m$  puntos, contando grados y multiplicidades de intersección. Probaremos también el lema de Max Noether, que nos permitirá probar como ejercicios, los teoremas de Pascal y Pappus.

### 4.2 Espectro proyectivo

En Geometría se define el espacio proyectivo asociado a un espacio vectorial como el conjunto de rectas (que pasan por el origen) del espacio vectorial. En Geometría Algebraica vamos a definir de modo equivalente a partir de  $\mathbb{A}_n = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  el espacio proyectivo. Las únicas subvariedades  $V$  que queremos considerar en  $\mathbb{A}_n$  son las variedades homogéneas, es decir, las que contengan para todo punto cerrado  $p \in V$  las rectas que pasan por  $p$  y el origen. Así, las subvariedades homogéneas de dimensión menor serán las rectas que pasan por el origen, que se corresponderán con los puntos cerrados del espacio proyectivo que queremos asociarle a  $\mathbb{A}_n$ .

Si  $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  es una función que se anula en la variedad homogénea  $V$ , escribamos  $p(x_1, \dots, x_n) = p_s(x_1, \dots, x_n) + \dots + p_m(x_1, \dots, x_n)$  como suma de polinomios homogéneos. Tendremos que

$$p(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^s p_s(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda^m p_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{en } V \quad \forall \lambda$$

Por tanto,  $p_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  en  $V$ , para todo  $i$ . En conclusión,  $V = (I)_0$ , donde  $I$  es un ideal generado por polinomios homogéneos. Es fácil ver el recíproco, es decir, si  $V = (I)_0$  donde  $I$  es un ideal generado por polinomios homogéneos, entonces para todo punto cerrado  $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V$  las rectas que

pasan por  $p$  y el origen están contenidas en  $V$ . En particular, las subvariedades homogéneas  $V \subseteq \mathbb{A}_n$  minimales son las rectas que pasan por el origen.

Diremos que el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_{n-1} = \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  asociado a  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  es el subconjunto de  $\mathbb{A}_n$  de los ideales primos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  generados por polinomios homogéneos. Si consideramos en  $\mathbb{P}_{n-1}$  la topología inducida por  $\mathbb{A}_n$ , tendremos que los puntos cerrados de  $\mathbb{P}_{n-1}$  se corresponden con las variedades homogéneas de  $\mathbb{A}_n$  de dimensión más pequeña, que son justamente las rectas de  $\mathbb{A}_n$  que pasan por el origen.

En Geometría Proyectiva se demuestra que  $\mathbb{P}_{n-1}$  está recubierto por los subconjuntos  $U_{x_i}^h = \{\text{rectas de } \mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}\} \text{ que pasan por el origen y no yacen en el hiperplano } x_i = 0\}$  y que éstos se corresponden con los puntos del espacio afín  $\mathbb{A}_{n-1}$ , del modo siguiente: El morfismo

$$\mathbb{A}_n - \{x_i = 0\} \rightarrow \mathbb{A}_{n-1}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right)$$

tiene por fibras las rectas que pasan por el origen y no yacen en el hiperplano  $x_i = 0$ , es decir, induce la igualdad

$$U_{x_i}^h = \{\text{rectas } \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \neq 0\} \xlongequal{\quad} \mathbb{A}_{n-1}$$

$$\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right)$$

En Álgebra Conmutativa, se prueba que  $U_{x_i}^h = \{x \in \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \text{ que no yacen en } (x_i)_0\}$  se identifica con  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_i}$ ; y la composición de los morfismos morfismo

$$\begin{array}{ccccc} U_{x_i}^h & \hookrightarrow & \mathbb{A}_n - (x_i)_0 & \longrightarrow & \mathbb{A}_{n-1} \\ & & (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \longrightarrow & \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \right) \\ & & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_i} & \longleftarrow & \mathbb{C}\left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] \end{array}$$

induce un homeomorfismo  $U_{x_i}^h = \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_i} \simeq \text{Spec } \mathbb{C}\left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]$ . Además se prueba que  $\mathbb{P}_{n-1} = \bigcup_i U_{x_i}^h$ .

Procedamos con todo rigor y generalidad.

**Definición 4.2.1.** Diremos que un anillo  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$  es un álgebra graduada si los  $R_i$  son subgrupos de  $R$  con la suma y si para cada  $r_i \in R_i$  y  $r_j \in R_j$ , entonces  $r_i \cdot r_j \in R_{i+j}$

**Definición 4.2.2.** Sea  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$  un álgebra graduada. Diremos que un ideal  $I \subset R$  de un álgebra graduada es homogéneo si está generado por elementos homogéneos, es decir,  $I = (i_j)_{j \in J}$  con  $i_j \in R_{n_j}$ .

**Ejercicio 4.2.3.** Probar que un ideal  $I \subseteq R$  es homogéneo si cumple que si  $f = f_s + f_{s+1} + \dots + f_n \in I$  ( $f_i$  elemento homogéneo de grado  $i$ ) entonces  $f_i \in I$  para todo  $i$ .

**Ejercicio 4.2.4.** Probar que el conjunto de los elementos homogéneos de un ideal primo es un ideal primo homogéneo. Probar que los ideales primos minimales de un anillo graduado son ideales primos homogéneos.

Llamaremos ideal irrelevante de  $R$  al ideal  $(\bigoplus_{n \neq 0} R_n)$ .

**Definición 4.2.5.** Llamaremos espectro proyectivo de  $R$ , y lo denotaremos  $\text{Proj } R$ , al conjunto de ideales primos homogéneos que no contienen al ideal irrelevante.

Evidentemente  $\text{Proj } R \subset \text{Spec } R$ . Consideraremos  $\text{Proj } R$  como espacio topológico con la topología inicial heredada de la topología de Zariski de  $\text{Spec } R$ . Si denotamos  $(f)_0^h$  a los ideales primos homogéneos que contienen a  $f \in R$  y escribimos  $f = f_n + f_{n+1} \cdots + f_m$ , es obvio que  $(f)_0^h = (f_n, \dots, f_m)_0^h = (f_n)_0^h \cap \cdots \cap (f_m)_0^h$ . Por tanto, una base de abiertos de la topología de  $\text{Proj } R$  son los abiertos

$$U_f^h = \{x \in \text{Proj } R, f \notin \mathfrak{p}_x\}, \quad (f \text{ homogéneo})$$

Si  $f_m \in R_m$  es un elemento homogéneo, entonces  $R_{f_m}$  es una álgebra homogénea, diciendo que el grado de  $\frac{g_n}{f_m^r} \in R_{f_m}$  es  $n - mr$ , para cada  $g_n \in R_n$ .

**Definición 4.2.6.** Diremos que un morfismo de álgebras  $\phi: R \rightarrow R'$  graduadas es un morfismo graduado de grado  $m \in \mathbb{N}$ , si para cada  $f_n \in R_n$  entonces  $\phi(f_n) \in R'_{nm}$ .

Si  $\phi: R \rightarrow R'$  es un morfismo graduado entonces el morfismo inducido  $\phi^*: \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$ , aplica ideales primos homogéneos en ideales primos homogéneos. Si suponemos que la imagen del ideal irrelevante por  $\phi$  no está contenido en más ideal primo homogéneo que los que contengan al irrelevante, tenemos definido un morfismo

$$\phi^*: \text{Proj } R' \rightarrow \text{Proj } R, x \mapsto \phi^*(x), \text{ donde } \mathfrak{p}_{\phi^*(x)} = \phi^{-1}(\mathfrak{p}_x)$$

**Ejemplo 4.2.7.** Sea  $\phi: k[x_0, x_1, x_2] \rightarrow k[x_0, x_1, x_2]$ ,  $\phi(x_i) = \sum_j \lambda_{ij} x_j$ , de modo que  $|\lambda_{ij}| \neq 0$ . Se cumple que  $\phi$  es un isomorfismo graduado de grado 1, que induce un isomorfismo  $\phi^*: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ . Diremos que  $\phi$  es un cambio de coordenadas homogéneo.

**Proposición 4.2.8.** 1. Se cumple que  $R \rightarrow R_{f_m}$  es un morfismo de grado uno y

$$U_{f_m}^h = \text{Proj } R_{f_m}$$

2. Si  $I$  es un ideal homogéneo de  $R$  entonces  $R/I$  es es un álgebra graduada homogénea, de modo que el morfismo  $R \rightarrow R/I$  es un morfismo graduado de grado uno y

$$\text{Proj } R/I = (I)_0^h$$

*Demostración.* Sólo es observar que las igualdades equivalentes conocidas con los espectros restringe a los espectros proyectivos.  $\square$

Dada un álgebra graduada  $R$  denotaremos por  $R_0$  a la subálgebra de  $R$  formada por los elementos de grado cero de  $R$ .

Por sencillez supondremos a partir de ahora que  $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$ , donde cada  $\xi_i$  es de grado 1.

**Teorema 4.2.9.** Se verifica

$$1. \text{Proj } R = \bigcup_{i=0}^n (\text{Proj } R - (\xi_i)_0^h).$$

2.  $(\text{Proj } R - (\xi_i)_0^h) \simeq_* \text{Spec } R_0[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i}]$ , donde  $\simeq_*$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* 1.  $\text{Proj } R = \bigcup_{i=0}^n U_{\xi_i}^h$ , ya que  $\bigcap_{i=0}^n (\xi_i)_0^h = (\xi_0, \dots, \xi_n)_0^h = \emptyset$  (pues  $(\xi_0, \dots, \xi_n)$  es el ideal irrelevante).

2. Hemos sobreentendido que  $R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  es el subanillo obvio de  $R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \xi_i^n \cdot R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ .

La composición de los dos morfismos naturales  $\text{Proj } R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \hookrightarrow \text{Spec } R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \rightarrow \text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ ,  $\mathfrak{p} \mapsto (\mathfrak{p} \cap R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i])$ , va a ser el homeomorfismo buscado.

Es obvio que todo primo homogéneo  $\mathfrak{p}$  de  $R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i}$  está determinado por sus elementos homogéneos de grado cero, es decir, por  $\mathfrak{p} \cap R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ . Es fácil comprobar que dado un ideal primo  $\mathfrak{q} \subset R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  entonces  $\mathfrak{q} \cdot R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} = \bigoplus \xi_i^n \cdot \mathfrak{q}$  es un ideal primo homogéneo de  $R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i}$ . Con lo que obtenemos una biyección

$$\text{Proj } R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \stackrel{*}{=} \text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$$

$$\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p} \cap R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$$

$$\mathfrak{q} \cdot R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]_{\xi_i} \longleftarrow \mathfrak{q}$$

A través de esta identificación  $(f_n)_0^h = (f_n/\xi_i^n)_0^h \stackrel{*}{=} (f_n/\xi_i^n)_0$  en  $\text{Spec } R_0[\xi_0/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ . Es decir,  $\stackrel{*}{=} \simeq$  es un homeomorfismo. □

Diremos que  $U_{\xi_i}^h$  es un abierto afín de  $\text{Proj } R$ .

**Ejercicio 4.2.10.** Consideremos  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$ , donde  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \sim (\alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$  si  $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_n) = (\lambda \cdot \alpha_0, \dots, \lambda \cdot \alpha_n)$ . Demostrar que la aplicación  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim \rightarrow \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ,  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_i x_j - \alpha_j x_i)_{ij}$  es inyectiva de imagen los puntos cerrados de  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ .

**Ejercicio 4.2.11.** 1. Demostrar que el epimorfismo  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$  define una inmersión cerrada  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \hookrightarrow \mathbb{P}_2$

2. En cada uno de los abiertos “afines” de la curva proyectiva compleja plana  $\text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$  complementario de los cerrados  $(x_i)_0^h$ , escribir las ecuaciones de la curva (“deshomogeneizar”).

3. Definir una curva proyectiva plana que en uno de los abiertos afines sea la curva plana “afín”  $y + x^2 = 0$ . ¿Corta la recta  $x = 0$ , a la curva  $y + x^2 = 0$ , en algún punto del “infinito”?

**Ejercicio 4.2.12.** Demostrar que  $R_0[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i}] \simeq R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]/(\xi_i - 1)$  y que por tanto,  $U_{\xi_i}^h \simeq (\xi_i - 1)_0$ . Probar que  $U_{\xi_i}^h \times (\mathbb{A}_1 - \{0\}) = U_{\xi_i}$ . Dar una interpretación geométrica de estos resultados.

### 4.3 Explosión en un punto y desingularización

**Definición 4.3.1.** Sea  $A$  un anillo y  $\mathfrak{p} \subset A$  un ideal. Se llama dilatado de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ , o anillo de Rees de  $A$  en  $\mathfrak{p}$ , al anillo graduado

$$D_{\mathfrak{p}}A = A \oplus \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}^2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}^n \oplus \cdots$$

El morfismo natural  $\text{Proj } D_{\mathfrak{p}}A \rightarrow \text{Spec } A$ ,  $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap A$  se denomina morfismo de explosión (o transformación cuadrática cuando  $\mathfrak{p}$  sea maximal), centrada en  $(\mathfrak{p})_0$ .

**Proposición 4.3.2.** Sea  $\mathfrak{m}_x \subset A$  un ideal maximal. El morfismo de explosión de  $\text{Spec } A$  en  $x$

$$\pi: \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x}A \rightarrow \text{Spec } A$$

verifica

1.  $\pi^{-1}(\text{Spec } A - x) \stackrel{\pi}{=} \text{Spec } A - x$ .
2.  $\pi^{-1}(x) = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x}A$ . “La fibra de  $x$  es igual al espacio tangente en  $x$  de  $\text{Spec } A$ ”.

*Demostración.* 1. Consideremos el morfismo  $A \rightarrow A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots$ . Dado  $\xi \in \mathfrak{m}_x$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_{\xi}) &= \text{Proj}(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)_{\xi} = \text{Proj}(A_{\xi} \oplus \mathfrak{m}_{x\xi} \oplus \cdots) \\ &= \text{Proj}(A_{\xi} \oplus A_{\xi} \oplus \cdots) = \text{Proj } A_{\xi}[t] = \text{Spec } A_{\xi} = U_{\xi} \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\text{Spec } A - x = \bigcup_{\xi \in \mathfrak{m}_x} U_{\xi}$  obtenemos el punto 1.

2. Por ser  $x \in \text{Spec } A$  cerrado sabemos que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x) &= \text{Proj}[(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)/\mathfrak{m}_x(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)] \\ &= \text{Proj}[(A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots)/(\mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x^2 \oplus \cdots)] \\ &= \text{Proj}(A/\mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \oplus \cdots) = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x}A \end{aligned}$$

□

**Observaciones:** Dado  $y \in \text{Spec } A$  distinto de  $x$ ,  $\pi^{-1}(y)$  se corresponde con el punto de  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x}A$  de ideal  $\mathfrak{p}_y \oplus (\mathfrak{p}_y \cap \mathfrak{m}_x) \oplus (\mathfrak{p}_y \cap \mathfrak{m}_x^2) \oplus \cdots$ , pues éste es un ideal primo homogéneo cuya imagen por  $\pi$  es  $y$ .

Sea  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .  $D_{\mathfrak{m}_x}A = A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots$  es una álgebra graduada generada por sus elementos de grado uno. Es decir, tenemos la igualdad  $A[\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n] = A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \cdots$ ,  $\tilde{\xi}_i \mapsto (0, \xi_i, \dots)$ . Dado  $\xi \in \mathfrak{m}_x$ , hemos probado que  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x}A - (\tilde{\xi})_0^h = \text{Spec } A[\frac{\tilde{\xi}_1}{\xi}, \dots, \frac{\tilde{\xi}_n}{\xi}]$ . Se cumple que  $A[\frac{\tilde{\xi}_1}{\xi}, \dots, \frac{\tilde{\xi}_n}{\xi}]$  es isomorfo, con el isomorfismo obvio, al anillo  $A[\frac{\xi_1}{\xi}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi}]$ , que es el subanillo obvio de  $A_{\xi}$ .

**Ejercicio 4.3.3.** Sea  $x \in \mathbb{A}_n$  el “origen”. Probar que el morfismo de explosión de  $\mathbb{A}_n$  en  $x$

$$\pi: \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x}\mathcal{O}_{\mathbb{A}_n} \rightarrow \mathbb{A}_n$$

verifica

1.  $\pi^{-1}(\mathbb{A}_n - x) \stackrel{\pi}{=} \mathbb{A}_n - x$ .

2.  $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}_{n-1}$ . “La fibra de  $x$  es igual a la proyectivización del cono tangente en  $x$  de  $\mathbb{A}_n$ , que coincide con el conjunto de direcciones en  $x$ ”.

Dada una subvariedad  $C \xrightarrow{i} \mathbb{A}_n$  se tiene un epimorfismo natural  $D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n} \rightarrow D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_C$ , luego el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} = \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_C & \xrightarrow{i'} & \text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n} = \tilde{\mathbb{A}}_n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ C & \xrightarrow{i} & \mathbb{A}_n \end{array}$$

Probar que si  $C$  es una recta, que pasa por el origen, entonces  $\tilde{C} \stackrel{\pi}{=} C$  y  $i'(\pi^{-1}(x))$  se identifica con la dirección definida por  $C$ . Probar que si  $n = 2$  y  $C$  es la curva nodal  $y^2 - x^2 + x^3 = 0$ , entonces  $i'(\pi^{-1}(x))$  se identifica con las dos direcciones definidas por las tangentes de  $C$  en  $x$ .

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $A$  un anillo semilocal (i.e., con un número finito de puntos cerrados), noetheriano, íntegro, de dimensión 1. Sea  $\mathfrak{m}_x$  un ideal maximal de modo que  $A/\mathfrak{m}_x$  tenga infinitos elementos. Se verifica*

$$\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = \text{Spec } A_1$$

(anillo  $A_1$  que especificaremos).

*Demostración.* Escribamos  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Consideremos el isomorfismo graduado

$$D_{\mathfrak{m}_x} A = A \oplus \mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{m}_x^2 \oplus \dots \stackrel{\text{def}}{=} A[\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n]$$

$$\xi_i \longleftarrow \tilde{\xi}_i$$

Sabemos que dado  $\xi \in \mathfrak{m}_x$ ,  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A - (\tilde{\xi})_0^h = U_{\tilde{\xi}}^h = \text{Spec } A[\tilde{\xi}_1/\tilde{\xi}, \dots, \tilde{\xi}_n/\tilde{\xi}] = \text{Spec } A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Para demostrar el teorema, basta encontrar  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  tal que  $(\tilde{\xi})_0^h = \emptyset$ , es decir  $\tilde{\xi}$  no se anula en ningún punto cerrado de  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A$ . Por la proposición anterior (y observaciones) buscamos  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  de modo que

1.  $\tilde{\xi}$  no se anule en ningún punto cerrado de  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A - \pi^{-1}(x) = \text{Spec } A - x$ . Es decir, si denotamos por  $y_1, \dots, y_r$  los puntos cerrados de  $\text{Spec } A$  distintos de  $x$ , buscamos  $\xi \notin \mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_{y_i}$  para todo  $i$ . “Geoméricamente, buscamos un parámetro que pase por  $x$  y no por los  $y_i$ ”.
2.  $\tilde{\xi}$  no se anule en ningún punto cerrado de  $\pi^{-1}(x) = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x} A$ . Ahora bien,  $G_{\mathfrak{m}_x} A$  es un anillo que en el “origen” tiene la misma dimensión que  $A$  en  $x$ , que es 1. Por tanto, como los ideales primos homogéneos de  $G_{\mathfrak{m}_x} A$  están incluidos estrictamente en el ideal de funciones que se anulan en el “origen” (ideal irrelevante), son ideales minimales, luego un número finito. En conclusión, siguiendo las notaciones de las observaciones anteriores, si denotamos  $\mathfrak{p}_{x_i} = \mathfrak{0} \oplus \mathfrak{p}_{x_{i1}} \oplus \mathfrak{p}_{x_{i2}} \oplus \dots$  los ideales primos homogéneos de  $G_{\mathfrak{m}_x} A$ , buscamos  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  de modo que  $\tilde{\xi} \notin \mathfrak{p}_{x_{i1}} \subsetneq \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ . “Geoméricamente, buscamos un parámetro que pasa por  $x$  transversalmente”.

Sea  $\bar{e} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \subset A/\mathfrak{m}_x^2$  tal que  $\bar{e} \notin \mathfrak{p}_{x_{i1}}$  para todo  $i$  (existe porque la unión de los subespacios propios  $\mathfrak{p}_{x_{i1}}$  no puede ser todo  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ , ya que  $A/\mathfrak{m}_x$  tiene infinitos elementos). Consideremos ahora el morfismo

$$\phi: A \rightarrow A/\mathfrak{m}_x^2 \times A/\mathfrak{m}_{y_1} \times \dots \times A/\mathfrak{m}_{y_n}, \quad a \mapsto (\bar{a}, \bar{a}, \dots, \bar{a})$$

que es epimorfismo, como se comprueba localmente. Si  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  es tal que  $\phi(\xi) = (\bar{e}, 1, \dots, 1)$ , entonces es el parámetro buscado.  $\square$

**Observaciones:** El anillo  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$  del teorema no depende de la elección del parámetro  $\xi$ : Dado  $\xi'$  tal que  $(\tilde{c}')_0^h = \emptyset$  en  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A$ , entonces  $(\xi'/\xi)_0 = \emptyset$  en  $\text{Spec } A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Luego  $\xi'/\xi$  es invertible y  $A[\xi_1/\xi', \dots, \xi_n/\xi'] \subseteq A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]_{\xi'/\xi} = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Por simetría tenemos la inclusión  $A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi] \subseteq A[\xi_1/\xi', \dots, \xi_n/\xi']$  inversa, con lo que concluimos la igualdad.

El ideal  $\mathfrak{m}_x A_1 = (\xi_1, \dots, \xi_n) \cdot A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi] = \xi A_1$ .

**Definición 4.3.5.** El anillo  $A_1$  del teorema anterior se llama anillo de la transformación cuadrática, o anillo de la explosión (en  $x$ ).

**Lema 4.3.6.** Con las notaciones e hipótesis del teorema anterior, se verifica que  $A = A_1 \Leftrightarrow$  el punto cerrado  $x$  en el que estamos explotando es no singular.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ )  $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x A_1$ , el cual es principal.

$\Leftarrow$ )  $\text{Proj}$  conmuta con localizaciones. En el complementario de  $x$ ,  $A$  y  $A_1$  son isomorfos. Localicemos en  $x$ ,  $\mathfrak{m}_x = (\xi)$ . Entonces  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = U_{\xi}^h = \text{Spec } A[\xi/\xi] = \text{Spec } A$ , luego  $A_1 = A$ .  $\square$

**Lema 4.3.7.** Si  $\mathcal{O}_v$  es un anillo de valoración que contiene a  $A$  entonces  $A_1 \subseteq \mathcal{O}_v$ . Por tanto, el morfismo  $A \hookrightarrow A_1$  es finito.

*Demostración.* Escribamos  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $D_{\mathfrak{m}_x} A = A[\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n]$ . Tenemos que  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = \bigcup_i \text{Spec } A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$ . Sea  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  de modo que  $\text{Proj } D_{\mathfrak{m}_x} A = \text{Spec } A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ , es decir,  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Observemos que

$$\begin{aligned} A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]_{\xi/\xi_i}^{\xi/\xi_i \text{ invert.}} &= A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]_{\xi/\xi_i} = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]_{\xi_i/\xi} \\ &= A_{1_{\xi_i/\xi}} \end{aligned}$$

Así pues, si  $\mathcal{O}_v$  contiene a algún  $A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i]$  contiene a  $A_1$ .

Sea  $\xi_j/\xi_i$  tal que  $v(\xi_j/\xi_i)$  sea máxima para todo  $i, j$ . Entonces  $v(\xi_k/\xi_i) \geq 0$  para todo  $k$ : Si  $v(\xi_k/\xi_i) < 0 \Rightarrow v(\xi_i/\xi_k) > 0 \Rightarrow v(\xi_j/\xi_i) < v(\xi_j/\xi_i) + v(\xi_i/\xi_k) = v(\xi_j/\xi_i \cdot \xi_i/\xi_k) = v(\xi_j/\xi_k)$ , lo que es contradictorio.

Por tanto,  $A[\xi_1/\xi_i, \dots, \xi_n/\xi_i] \subseteq \mathcal{O}_v$  y  $A_1 \subseteq \mathcal{O}_v$ . Como consecuencia, el morfismo  $A \hookrightarrow A_1$  es entero y como  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$  el morfismo es finito.  $\square$

**Teorema 4.3.8.** Sea  $A$  un anillo semilocal, noetheriano, íntegro, de dimensión 1. Si el cierre entero de  $A$  en su cuerpo de fracciones es un  $A$ -módulo finito, entonces dicho cierre entero se alcanza por un número finito de explosiones en puntos cerrados.

*Demostración.* Sea  $x$  un punto singular de  $\text{Spec } A$ . Por el lema 4.3.6, sabemos que  $A$  está incluido estrictamente en  $A_1$ . Por el lema 4.3.7 sabemos que  $A_1$  está incluido en el cierre entero  $\bar{A}$  de  $A$  en su cuerpo de fracciones. Así pues, tenemos  $A \subsetneq A_1 \subseteq \bar{A}$ .

Procediendo del mismo modo con  $A_1$ , tendremos  $A \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subseteq \bar{A}$ . Como  $\bar{A}$  es un  $A$ -módulo finito y  $A$  es noetheriano, este proceso es finito y terminará cuando  $A_n = \bar{A}$ .  $\square$

**Definición 4.3.9.** La fibra en el morfismo de explosión del punto por el que se explota se denomina fibra excepcional. En las condiciones y notaciones del teorema anterior si consideramos la cadena

$$\text{Spec } \bar{A} = \text{Spec } A_n \xrightarrow{\pi_n} \text{Spec } A_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \rightarrow \text{Spec } A_1 \xrightarrow{\pi_1} \text{Spec } A$$

a la cadena correspondiente de fibras excepcionales es un orden finito arbolado que se conoce como árbol de explosión de  $A$ .

## 4.4 Multiplicidad de un punto singular

**Definición 4.4.1.** Se llama multiplicidad de un anillo local noetheriano  $\mathcal{O}_x$  de dimensión  $r$ , al coeficiente de mayor grado de su polinomio de Samuel multiplicado por el factor  $r!$ . Lo denotaremos  $m_x(\mathcal{O}_x)$ .

**Ejemplo 4.4.2.** Los anillos locales regulares son de multiplicidad 1: Si  $\mathcal{O}$  es un anillo local regular de ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$ , sabemos que  $G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x[x_1, \dots, x_m]$  y el polinomio de Samuel es  $S_{\mathcal{O}}(n) = \binom{n+m-1}{m} = \frac{1}{m!} n^m + \dots$ . Por tanto,  $m_x(\mathcal{O}) = \frac{1}{m!} \cdot m! = 1$ .

**Ejemplo 4.4.3.** Sea  $X$  es una hipersuperficie de  $\mathbb{A}_m$  definida por un polinomio  $p(x_1, \dots, x_m) = p_r(x_1, \dots, x_m) + \cdots + p_s(x_1, \dots, x_m)$  que escribimos como suma de polinomios homogéneos. Por la proposición anterior, la sucesión

$$0 \rightarrow G_{\mathfrak{m}_0} k[x_1, \dots, x_m] \xrightarrow{\cdot p_r(x_1, \dots, x_m)} G_{\mathfrak{m}_0} k[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow G_{\mathfrak{m}_0} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

es exacta. Por tanto, el polinomio de Samuel de  $X$  en el origen 0 es

$$S_{\mathcal{O}_{X,0}}(n) = \binom{m+n-1}{m} - \binom{m+n-1-r}{m} = \frac{r}{(m-1)!} n^{m-1} + \cdots$$

Luego la multiplicidad de  $X$  en el origen es igual  $r$ .

En el caso particular de que  $X$  sea una curva plana entonces

$$S_{\mathcal{O}_{X,0}}(n) = r \cdot n - \frac{r(r-1)}{2}$$

siendo  $r$  la multiplicidad de  $X$  en el origen.

Supongamos ahora que  $\mathcal{O}_x$  es un anillo local noetheriano de multiplicidad  $m_x(\mathcal{O}_x)$ . Sea  $f \in \mathcal{O}_x$  tal que  $f \in \mathfrak{m}_x^r - \mathfrak{m}_x^{r+1}$  y  $f_r = \bar{f} \in \mathfrak{m}_x^r/\mathfrak{m}_x^{r+1}$  no sea un divisor de cero en  $G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_x$ . Se cumple que  $m_x(\mathcal{O}_x/(f)) = r \cdot m_x(\mathcal{O}_x)$ : Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_x \xrightarrow{\cdot f_r} G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_x \longrightarrow G_{\mathfrak{m}_x}(\mathcal{O}_x/(f)) \rightarrow 0$$

Por tanto,  $S_{\mathcal{O}_x/(f)}(n) = S_{\mathcal{O}_x}(n) - S_{\mathcal{O}_x}(n-r)$  y un sencillo cálculo demuestra lo requerido.

**Lema 4.4.4 (de estabilidad del ideal).** Sean  $A$ ,  $\mathfrak{m}_x$ ,  $A_1$  como en el teorema 4.3.4, y  $A \rightarrow A_1$  el morfismo de explosión. Para todo  $s \gg 0$  se verifica  $\mathfrak{m}_x^s = \mathfrak{m}_x^s \cdot A_1$ .

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{m}_x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $\xi \in \mathfrak{m}_x$  tal que  $A_1 = A[\xi_1/\xi, \dots, \xi_n/\xi]$ . Un sistema generador de  $A_1$  como  $A$ -módulo lo forman los elementos de la forma  $\frac{\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}}{\xi^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}$ . Como  $A_1$  es un  $A$ -módulo finito, para un  $s \gg 0$  tendremos que  $A_1 = \{ \frac{p_s(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\xi^s} : p_s \text{ polinomios homogéneos de grado } s \}$ . Observando que  $\mathfrak{m}_x \cdot A_1 = \xi A_1$ , tendremos que  $\mathfrak{m}_x^s \cdot A_1 = \xi^s A_1 \subseteq \mathfrak{m}_x^s$ .  $\square$

**Observación:** Si  $A$  es el anillo local de una curva plana en un punto racional, puede tomarse  $s$  igual a la multiplicidad de  $A$  menos uno (véase).

**Notación 4.4.5.** A partir de ahora los anillos considerados serán siempre  $k$ -álgebras de tipo finito, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Si  $A$  es una  $k$ -álgebra de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y  $M$  es un  $A$ -módulo de longitud finita, se verifica que  $l_A(M) = \dim_k M$  porque toda cadena irrefinable de  $A$ -submódulos de  $M$  tiene como factores  $A$ -módulos simples, que son isomorfos a  $A/\mathfrak{m}$ , siendo  $\mathfrak{m}$  un ideal maximal, y  $A/\mathfrak{m} \simeq k$ .

Sea  $X = \text{Spec } B = \{x_1, \dots, x_n\}$  una variedad algebraica de dimensión cero. Diremos que  $\dim_k B$  es el número de puntos de  $X$  contando multiplicidades. Observemos que  $B = B_{x_1} \times \dots \times B_{x_n}$  y por tanto  $\dim_k B = \sum_i \dim_k B_{x_i}$ . Diremos que  $\dim_k B_{x_i}$  es la multiplicidad con la que aparece  $x_i$  en  $X$ . Si denotamos  $(X)$  el número de puntos, contando multiplicidades, de  $X$  y  $(X)_{x_i}$  la multiplicidad con la que aparece  $x_i$  en  $X$ , tenemos que

$$(X) = \sum_{x_i \in X} (X)_{x_i}$$

**Teorema 4.4.6.** Sean  $A$ ,  $\mathfrak{m}_x$  y  $A_1$  como en el teorema 4.3.4. El coeficiente de grado uno del polinomio de Samuel de  $A$ , es decir, la multiplicidad de  $A$  en  $x$  es igual al número de puntos de la fibra excepcional (contando multiplicidades). El coeficiente de grado cero del polinomio de Samuel de  $A$  es igual a  $-l_A(A_1/A)$ .

*Demostración.* Por el lema de estabilidad para  $n \gg 0$  se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A/\mathfrak{m}_x^n \rightarrow A_1/\mathfrak{m}_x^n A_1 \rightarrow A_1/A \rightarrow 0$$

Tomando longitudes tenemos  $S_{A_x}(n) = l_A(A_1/\mathfrak{m}_x^n A_1) - l_A(A_1/A) = l_A(A_1/\mathfrak{m}_x A_1)n - l_A(A_1/A)$ , porque  $\mathfrak{m}_x A_1$  es principal. Por tanto,  $m_x(A) = l_A(A_1/\mathfrak{m}_x A_1)$  y  $S_{A_x}(0) = -l_A(A_1/A)$ .  $\square$

**Corolario 4.4.7.** Sea  $A$  como en el teorema 4.3.4. Sea  $\bar{A}$  su cierre entero en su cuerpo de fracciones. Sea  $A \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = \bar{A}$ , la cadena de las sucesivas explosiones; digamos que  $A_{i+1}$  es la explosión de  $A_i$  en  $y_i$ . Se cumple

$$l_A(\bar{A}/A) = - \sum_{y_i \in \text{árb. expl.}} S_{A_i, y_i}(0)$$

*Demostración.*  $l_A(\bar{A}/A)$  es el número de eslabones de las series de composición de  $A$ -módulo que comienzan en  $A$  y terminan en  $\bar{A}$ . Si consideramos la sucesión  $A \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n = \bar{A}$ , tendremos que  $l_A(\bar{A}/A) = \sum_i l_A(A_{i+1}/A_i)$ .

Ahora ya,

$$l_A(\bar{A}/A) = \sum_i \dim_k(A_{i+1}/A_i) = - \sum_{y \in \text{árb. expl.}} S_{A_i, y_i}(0)$$

donde la última igualdad es consecuencia de la proposición anterior.  $\square$

**Corolario 4.4.8.** Si  $A$  es el anillo local de una curva plana, entonces

$$l_A(\bar{A}/A) = \sum_{y \in \text{árb. expl.}} \frac{m_y(m_y - 1)}{2}$$

donde denotamos por  $m_y$  la multiplicidad del punto  $y$ .

*Demostración.* Los anillos locales de los puntos del árbol de explosión de  $A$  son anillos locales de curvas planas. Ahora ya, se concluye por el teorema y corolario anterior, y el cálculo del ejemplo anterior.  $\square$

En conclusión, el número de puntos, contando multiplicidades, que aparece en la fibra de un punto de una curva plana sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, en el morfismo de desingularización, es  $1 + \sum_{y \in \text{árb. expl.}} \frac{m_y(m_y-1)}{2}$ .

## 4.5 Multiplicidad de intersección de una curva con una hipersuperficie

**Lema 4.5.1.** *Sea  $A \hookrightarrow B$  un morfismo de anillos íntegros, tal que  $B/A$  es un  $A$ -módulo de longitud finita. Si  $a \in A$  es tal que  $A/aA$  y  $B/aB$  son  $A$ -módulos de longitud finita entonces  $l_A(A/aA) = l_A(B/aB)$ .*

*Demostración.* Empecemos observando que el morfismo  $B/A \xrightarrow{a} aB/aA, \bar{b} \mapsto \overline{ab}$ , es un isomorfismo. Por tanto,  $l_A(aB/aA) = l_A(B/aA)$ . Si consideramos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} aA & \xrightarrow{\quad} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ aB & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

tendremos que  $l_A(aB/aA) + l_A(B/aB) = l_A(B/aA) = l_A(B/aA) + l_A(A/aA)$ , y por lo tanto que  $l_A(A/aA) = l_A(B/aB)$ .  $\square$

**Definición 4.5.2.** Si  $X$  es una curva de un espacio afín  $\mathbb{A}_m$  y  $H \equiv p(x_1, \dots, x_m) = 0$  una hipersuperficie que no pasa por ninguna componente de  $X$ , entonces  $X \cap H$  es un número finito de puntos. Se llama multiplicidad de intersección de  $X$  con  $H$  en un punto  $x$  de  $X$  al número  $(X \cap H)_x$ .

Llamaremos número de puntos de corte de  $C$  con  $H$ , contando multiplicidades al número  $(C \cap H)$ .

**Teorema 4.5.3.** *Sea  $C$  una curva y  $H$  una hipersuperficie de un espacio afín  $\mathbb{A}_n$ , sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. La multiplicidad de intersección de  $C$  y  $H$  en un punto  $x$  es el producto de las multiplicidades de  $C$  y  $H$  en  $x$  más las multiplicidades de intersección en los puntos de la fibra excepcional de las explosiones de  $C$  y  $H$ .*

*Demostración.* Consideremos el diagrama de las variedades explotadas en  $x$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{C} & \longrightarrow & \tilde{\mathbb{A}}_n & \longleftarrow & \tilde{H} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' \\ C & \longrightarrow & \mathbb{A}_n & \longleftarrow & H \end{array}$$

Supongamos que  $x$  es el “origen”. Sea  $\xi$  un parámetro transversal a  $C$  en  $x$ . Sabemos que  $\tilde{C} \subset \text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n}[x_1/\xi, \dots, x_n/\xi] = U_{\tilde{\xi}}^h \subset \tilde{\mathbb{A}}_n$  y si  $H \equiv p = p_r + \dots + p_n = 0$  (con  $p_i$  polinomios homogéneos de grado  $i$ ) la ecuación de  $\tilde{H} \cap U_{\tilde{\xi}}^h$  es  $p' = p/\xi^r = p_r(x_1/\xi, \dots, x_n/\xi) + \dots + \xi^{s-r} p_s(x_1/\xi, \dots, x_n/\xi) = 0$ .

Si denotamos por  $\mathcal{O}_1$  al anillo de la explosión de  $\mathcal{O}_{C,x}$  en  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned} (C \cap H)_x &= l(\mathcal{O}_{C,x}/(p)) \stackrel{4.5.1}{=} l(\mathcal{O}_1/(p)) = l(\mathcal{O}_1/(\xi^r \cdot p')) \\ &= r \cdot l(\mathcal{O}_1/(\xi)) + l(\mathcal{O}_1/p') \stackrel{4.4.6}{=} m_x(H) \cdot m_x(C) + \sum_{\substack{y \in \text{ciclo.exc.} \\ = \pi^{-1}(x)}} (\tilde{C} \cap \tilde{H})_y \end{aligned}$$

□

**Corolario 4.5.4.** *La multiplicidad de intersección, de una curva con una hipersuperficie en un punto, es mayor o igual que el producto de sus multiplicidades en dicho punto, siendo igual precisamente si sus espacios tangentes no tienen parte común en dicho punto. En este caso, se dice que se cortan transversalmente y, en el otro, que son tangentes en el punto.*

*Demostración.* Sigamos las notaciones de la demostración anterior. Consideramos los morfismos

$$\begin{array}{ccccc} T_x C = \text{Proj } G_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{O}_{C,x} & \hookrightarrow & T_x \mathbb{A}_n & \longleftarrow & T_x H \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \text{Proj } k[\xi_1, \dots, \xi_n] & & \pi^{-1}(x) = \text{Proj } k[x_1, \dots, x_n] & & \text{Proj } k[x_1, \dots, x_n]/(p_r) \end{array}$$

Tenemos por la fórmula final de la demostración anterior que la multiplicidad de intersección, de una curva con una hipersuperficie en un punto es igual al producto de sus multiplicidades en dicho punto si y sólo si  $\sum_{y \in \text{ciclo.exc.}, y = \pi^{-1}(x)} (\tilde{C} \cap \tilde{H})_y = 0$ , que equivale a que  $T_x C \cap T_x H$  es vacío. En caso contrario, la mul-

tiplicidad de intersección, de una curva con una hipersuperficie en un punto, es mayor estrictamente que el producto de sus multiplicidades en dicho punto.

□

**Corolario 4.5.5.** *La multiplicidad de una curva en un punto es igual a la multiplicidad de intersección de la curva explotada con el ciclo excepcional. La multiplicidad de una curva en un punto es mayor o igual que la suma de las multiplicidades de los puntos de la curva explotada que yacen en la fibra excepcional, y es igual si y sólo si el ciclo excepcional es transversal a la curva explotada en todos los puntos de corte.*

*Demostración.* Sea  $A$  el anillo local de la curva en el punto dado, digamos  $x$ . Sea  $A_1$  el anillo de la explosión de la curva. Sea  $\xi$  un parámetro regular transversal a la curva en el punto. Tenemos que  $A/(\xi)$  es el anillo de la intersección de la curva con la hipersuperficie  $\xi = 0$ , y su longitud es justamente la multiplicidad de la curva.  $A_1/(\xi)$  es el anillo de la intersección de la curva explotada con el ciclo excepcional. Ahora ya, como  $l(A/(\xi)) = l(A_1/(\xi))$ , concluimos.

□

## 4.6 Teoremas de Bézout y Max Noether

Si  $C$  es una curva proyectiva del espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(k)$  y  $H$  es una hipersuperficie que no pasa por ninguna componente de  $C$ , entonces  $C \cap H$  es un número finito de puntos. Existe, por tanto, un hiperplano  $H'$  que no pasa por esos puntos. Así pues,  $C \cap H$  está incluido en el espacio afín,  $\mathbb{A}_n = \mathbb{P}_n - H'$ . Deshomogeneizando tenemos que  $C \cap H = \text{Spec } A$ . Diremos que el número de puntos de corte de  $C$  con  $H$ , que denotaremos  $(C \cap H)$ , es el número  $\dim_k A$ . Número que no depende de la elección de  $H'$  y es estable por cambios de cuerpo base.

**Teorema 4.6.1 (de Bézout).** *El número de puntos de corte, contando multiplicidades, de dos curvas proyectivas planas, sin componentes comunes, de grados  $r, r'$  es  $r \cdot r'$ .*

*Demostración.* Podemos suponer que el cuerpo es algebraicamente cerrado. Podemos suponer que el hiperplano del infinito  $x_0 = 0$  no pasa por ninguno de los puntos de la intersección de las curvas, llamémoslas  $C, C'$ .

Escribamos  $C = \text{Proj } k[x_0, x_1, x_2]/(p_r(x_0, x_1, x_2))$ ,  $C' = \text{Proj } k[x_0, x_1, x_2]/(p_{r'}(x_0, x_1, x_2))$ . Sea  $p(x, y) = \frac{p_r(x_0, x_1, x_2)}{x_0^r}$  y  $p'(x, y) = \frac{p_{r'}(x_0, x_1, x_2)}{x_0^{r'}}$ . Tenemos que probar que  $\dim_k k[x, y]/(p(x, y), p'(x, y)) = r \cdot r'$ .

Denotemos  $S = k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'})$ .  $S/(x_0)$  es una  $k$ -álgebra finita, porque su espectro primo es el ideal irrelevante ya que su espectro proyectivo es el vacío. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Ker } x_0 \rightarrow S \xrightarrow{x_0} S \rightarrow S/(x_0) \rightarrow 0$$

Para  $n \gg 0$ ,  $\dim_k S_n$  es constante y  $[S/(x_0)]_n = 0$ , luego  $[\text{Ker } x_0]_n = 0$ . Ahora ya

$$k[x, y]/(p(x, y), p'(x, y)) = [S_{x_0}]_0 = \bigcup_i \frac{S_i}{x_0^i} = \frac{S_n}{x_0^n} \simeq S_n$$

y obtenemos que  $\dim_k k[x, y]/(p(x, y), p'(x, y)) = \dim_k S_n$ .

Denotemos  $A = k[x_0, x_1, x_2]$ . La sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus A & \longrightarrow & A \longrightarrow k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'}) \longrightarrow 0 \\ & & q & \longrightarrow & (p_{r'} \cdot q, -p_r \cdot q) & & q \longrightarrow \bar{q} \\ & & & & (q, q') & \longrightarrow & p_r \cdot q + p_{r'} \cdot q' \end{array}$$

es exacta. Si denotamos  $A[-n]$  por el anillo  $k[x_0, x_1, x_2]$ , pero donde decimos que un polinomio homogéneo de grado  $m$ ,  $p_m(x_0, x_1, x_2)$  tiene grado  $m + n$ , entonces podemos escribir la anterior sucesión exacta como la siguiente sucesión (la misma salvo la nueva convención en los grados), de modo que los morfismos aplican elementos de grado  $m$  en elementos de grado  $m$ :

$$0 \rightarrow A[-r - r'] \rightarrow A[-r] \oplus A[-r'] \rightarrow A \rightarrow k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'}) \rightarrow 0$$

Grado a grado la sucesión es exacta. Por tanto,

$$\dim_k (k[x_0, x_1, x_2]/(p_r, p_{r'}))_m = \binom{m+2}{2} + \binom{m+2-r-r'}{2} - \binom{m+2-r}{2} - \binom{m+2-r'}{2} = r \cdot r'$$

para  $m \geq r + r'$ . □

Ahora vamos a demostrar el teorema de Max Noether, con el que se podrán resolver múltiples problemas geométricos, como los teoremas de Pascal y Pappus.

Dado un ideal homogéneo  $(p_n(x_0, x_1, x_2)) \subseteq k[x_0, x_1, x_2]$  y un punto  $x \in \mathbb{P}_2 - (x_i)_0^h$  denotaremos  $[p_n(x_0, x_1, x_2)]_x \stackrel{\text{Not.}}{=} (p_n(x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i))_x \subseteq k[x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i]_x$ . Puede comprobarse que si  $x \in \mathbb{P}_2 - (x_j)_0^h$ , entonces  $k[x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i]_x = k[x_0/x_j, x_1/x_j, x_2/x_j]_x$  y  $(p_n(x_0/x_i, x_1/x_i, x_2/x_i))_x = (p_n(x_0/x_j, x_1/x_j, x_2/x_j))_x$ .

**Teorema 4.6.2 (Max Noether).** Sean  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  polinomios homogéneos ( $i = 1, 2, 3$ ). Consideremos las curvas proyectivas planas  $C_i \equiv p_i = 0$ . Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Existe una ecuación

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

con  $a, b$  polinomios homogéneos de grados  $\text{gr } a = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_1, \text{gr } b = \text{gr } p_3 - \text{gr } p_2$ , si y sólo si para todo  $x \in C_1 \cap C_2$  se verifica que  $[p_3]_x \subseteq [p_1]_x + [p_2]_x$ .

*Demostración.* Es obvio que si  $p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$  entonces  $[p_3]_x \subseteq [p_1]_x + [p_2]_x$ . Veamos con el recíproco.

Por cambio homogéneo de coordenadas, podemos suponer que  $x_0 = 0$  no pasa por ningún punto de  $C_1 \cap C_2$ , es decir,  $p_1(0, x_1, x_2)$  es primo con  $p_2(0, x_1, x_2)$ . Sabemos que

$$\frac{p_3}{x_0^{n_3}} = a \cdot \frac{p_1}{x_0^{n_1}} + b \cdot \frac{p_2}{x_0^{n_2}}$$

Tenemos homogeneizando que  $x_0^r \cdot p_3 = a' p_1 + b' p_2$ . Sea  $r$  mínimo en las igualdades de esta forma. Si  $r > 0$ , entonces  $0 = a'(0, x_1, x_2)p_1(0, x_1, x_2) + b'(0, x_1, x_2)p_2(0, x_1, x_2)$ . Por tanto,  $a'(0, x_1, x_2) = h \cdot p_2(0, x_1, x_2)$  y  $b'(0, x_1, x_2) = -h \cdot p_1(0, x_1, x_2)$ . Luego  $a'' = a' - h \cdot p_2, b'' = b' + h \cdot p_1$  son divisibles por  $x_0$  y  $x_0^r \cdot p_3 = a'' p_1 + b'' p_2$ . Dividiendo en esta igualdad por  $x_0$  llegamos a contradicción, porque  $r - 1 < r$ .

En conclusión,

$$p_3 = a \cdot p_1 + b \cdot p_2$$

En cuanto a los grados de  $a$  y  $b$  es fácil demostrar que se puede suponer que cumplen lo requerido.  $\square$

**Proposición 4.6.3.** Sean  $C_i$  curvas proyectivas planas definidas por polinomios homogéneos  $p_i \in k[x_0, x_1, x_2]$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Supongamos que  $C_1, C_2$  no tienen componentes comunes. Supongamos el cuerpo base  $k$  es algebraicamente cerrado.  $C_3$  verifica las condiciones de Noether en un punto cerrado  $x \in C_1 \cap C_2$ , es decir,  $[p_3]_x \subseteq [p_1]_x + [p_2]_x$  si

- 1)  $C_1$  y  $C_2$  son simples en  $x$ , se cortan transversalmente en  $x$  y  $x \in C_3$ .
- 2) El punto  $x$  es un punto simple de  $C_1$  y  $(C_1 \cap C_3)_x \geq (C_1 \cap C_2)_x$  (es decir, la multiplicidad de intersección de  $C_3$  con  $C_1$  en  $x$  es mayor o igual que la multiplicidad de intersección de  $C_2$  con  $C_1$  en  $x$ ).
- 3)  $C_1$  y  $C_2$  poseen tangentes distintas y  $m_x(C_3) \geq m_x(C_1) + m_x(C_2) - 1$ .

*Demostración.* Como la proposición es local, podemos suponer que las curvas  $C_i$  son curvas planas afines de ecuaciones  $p_i(x, y) = 0$ .

1) Por las hipótesis  $(k[x, y]/(p_1, p_2))_x = k$ . Por tanto, si denotamos  $\mathfrak{m}_x$  el ideal maximal de las funciones que se anulan en  $x$ , tenemos que  $\mathfrak{m}_x = (p_1, p_2)_x$ , luego  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x$ .

2) Si  $x$  es un punto simple de  $C_1$ , entonces  $\overline{\mathfrak{m}_x} = (t)$  en  $(k[x, y]/(p_1(x, y)))_x$ . Además,  $\overline{(p_i(x, y))} = (t^{(C_i \cap C_1)_x})$ . Por tanto,  $(p_3(x, y)) \subseteq (p_2(x, y))$ , luego  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x$ .

3) Vamos a usar del lema de estabilidad para curvas planas, que dice si  $\mathcal{O}_{C_1, x} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$  es el morfismo de explosión en el punto  $x$  entonces  $\mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$

Por otra parte, si  $\xi$  es un parámetro transversal a  $C_1$  en  $x$ , por el que explotamos, tenemos que  $p_2(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = p'(x/\xi, y/\xi) \cdot \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = \xi^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$  porque  $C_1$  y  $C_2$  no tienen tangentes comunes en  $x$ . Por tanto,  $p_2(x, y) \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x}$ .

Con todo,

$$\begin{aligned}
p_3(x, y) &\in \mathfrak{m}_x^{m_x(C_3)} \subset \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)+m_x(C_2)-1} = \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \\
&= \mathfrak{m}_x^{m_x(C_2)} \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} = p_2(x, y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \cdot \tilde{\mathcal{O}}_{C_1, x} \\
&= p_2(x, y) \cdot \mathfrak{m}_x^{m_x(C_1)-1} \subset p_2(x, y) \mathcal{O}_{C_1, x}
\end{aligned}$$

por lo que  $(p_3)_x \subset (p_1, p_2)_x \in k[x, y]$ . □

## 4.7 Ramas analíticas

Sea  $\mathcal{O}$  un anillo noetheriano íntegro local de dimensión 1, de modo que el cierre entero en su cuerpo de fracciones sea un  $\mathcal{O}$ -módulo finito. Denotemos  $\mathfrak{m}_x$  su ideal maximal.

**Definición 4.7.1.** Se llaman ramas analíticas de  $\mathcal{O}$  en  $x$  a los ideales primos minimales del completado  $\hat{\mathcal{O}}$  de  $\mathcal{O}$  para la topología  $\mathfrak{m}_x$ -ádica.

**Teorema 4.7.2.** Sea  $\bar{\mathcal{O}}$  el cierre entero de  $\mathcal{O}$  en su cuerpo de fracciones  $\Sigma$ . Denotemos por  $y_1, \dots, y_s$  los puntos cerrados de  $\text{Spec } \bar{\mathcal{O}}$ . Se verifica que

$$\bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^s \varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_{y_i}^n)$$

Por tanto, existe una correspondencia biunívoca entre el espectro minimal de  $\hat{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}$  y el espectro maximal de  $\bar{\mathcal{O}}$ .

*Demostración.* Se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}} &= \varprojlim_n \bar{\mathcal{O}} / \mathfrak{m}_x^n = \varprojlim_n \left( \bigoplus_{i=1}^s (\bar{\mathcal{O}} / \mathfrak{m}_x^n)_{y_i} \right) = \bigoplus_{i=1}^s \left( \varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_x^n \bar{\mathcal{O}}_{y_i}) \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^s \left( \varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_{y_i}^n) \right)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que para  $s \gg 0$   $\mathfrak{m}_y^s \subset \mathfrak{m}_x \bar{\mathcal{O}}_{y_i}$ .

Ahora bien,  $\bar{\mathcal{O}}_{y_i}$  es un anillo local regular de dimensión 1, luego  $\varprojlim_n (\bar{\mathcal{O}}_{y_i} / \mathfrak{m}_{y_i}^n)$  también. Por tanto, este último, tiene un sólo ideal primo maximal y un sólo ideal primo minimal. Hemos concluido. □

Considerese la sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ . Completando se obtiene  $0 \rightarrow \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\bar{\mathcal{O}}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}} \rightarrow 0$ . Se verifica que  $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$  ya que  $\mathcal{C}$  es un  $\mathcal{O}$ -módulo finito de soporte  $x$ . En particular, si  $\mathfrak{p}_y$  es un ideal primo mínimo de  $\hat{\mathcal{O}}$ , entonces  $\hat{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}_y} = 0$ , luego  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}_y} = \hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}_y}$ .

**Teorema 4.7.3.** Hay una correspondencia biunívoca entre las ramas analíticas y valoraciones de  $\Sigma$  que dominan a  $\mathcal{O}$ , esto es, entre el espectro minimal de  $\hat{\mathcal{O}}$  y el maximal de  $\bar{\mathcal{O}}$ .

*Demostración.* Si  $\mathfrak{p}_y$  es un ideal primo minimal de  $\hat{\mathcal{O}}$ , la fibra de  $y$  por el morfismo  $\text{Spec } \hat{\bar{\mathcal{O}}} \rightarrow \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}$  es el espectro de  $\hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}_y} / \mathfrak{p}_y \hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}_y} = \hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}_y} / \mathfrak{p}_y \hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}_y}$  por el comentario anterior. Luego, la fibra de  $y$  es un sólo punto que habrá de ser minimal. Por tanto, el espectro minimal de  $\hat{\mathcal{O}}$  está en correspondencia biunívoca con el espectro minimal de  $\hat{\bar{\mathcal{O}}}$ . Por el teorema anterior, se sigue que hay una correspondencia entre el espectro minimal de  $\hat{\mathcal{O}}$  y el maximal de  $\bar{\mathcal{O}}$ . □

**Ejemplo 4.7.4.** Sea  $C$  una curva plana  $p(x, y) = 0$  y  $x$  el origen. Se tiene que  $\mathcal{O}_{C,x} = k[x, y]/(p)$  y  $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x} = k[[x, y]]/(p)$ .

Se sabe que  $k[[x, y]]$  es un anillo de factorización única (como todo anillo local regular). Por tanto,  $p$  descompone en producto de series irreducibles  $p = f_1 \cdots f_r$ , diferentes entre sí porque  $\widehat{\mathcal{O}}$  no tiene nilpotentes porque  $\widehat{\mathcal{O}}$ , que es producto de anillos regulares, no los tiene.

Así pues, las ramas analíticas pueden ser interpretadas como las series en las que  $p$  factoriza.

### 4.7.1 Polígono de Newton

Consideremos la curva plana  $p(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$ ,  $a_{00} = 0$  que pasa por el origen. Las ecuaciones de las distintas ramas de la curva son de la forma  $x = t^n$ ,  $y = t^m \cdot (a_0 + t)$ ,  $a_0 \neq 0$ ,  $n, m > 0$ . Quiero calcular  $n, m$  con la ayuda del polígono de Newton.

Tendremos que  $0 = p(t^n, t^m(a_0 + t)) = \sum a_{ij}t^{ni+mj} \cdot (a_0 + t)^j$ . Sea  $(i_1, j_1)$ , con  $a_{i_1 j_1} \neq 0$  tal que  $ni_1 + mj_1 = r$  sea mínimo. Si la ecuación anterior se cumple entonces

$$\sum_{ni+mj=r} a_{ij}a_0^j = 0$$

Por tanto, la recta  $nx + my = r$  pasa por dos o más puntos  $(i_k, j_k)$ , con  $a_{i_k j_k} \neq 0$  y para los demás puntos  $(i, j)$ , con  $a_{ij} \neq 0$ ,  $ni + mj > r$ .

Es decir, si dibujamos en el plano los puntos  $(i, j)$ , con  $a_{ij} \neq 0$ , la recta  $nx + my = r$  ( $n, m > 0$ ) pasa por dos o más de estos puntos y los demás quedan por encima de esta recta. El conjunto de las rectas con estas propiedades se denomina polígono de Newton de  $p(x, y) = 0$ .

Recíprocamente, sea  $nx + my = r$  (o  $ncx + mc = rc$ , con  $c > 0$ ),  $n, m > 0$  una recta del polígono. Sea  $a_0 \neq 0$  una solución de la ecuación  $\sum_{ni+mj=r} a_{ij}a_0^j = 0$ . La curva

$$q(t, z) = t^{-r} \cdot p(t^n, t^m(a_0 + z))$$

se anula en el origen y tendremos que  $t = u^c$ ,  $z = \dot{u} = s(u) \in k[[u]]$ , luego  $x = u^{nc}$  e  $y = u^{mc} \cdot (a_0 + s(u))$ .

Observemos que hemos dado un procedimiento recursivo para calcular las ramas.

## 4.8 Puntos cuspidales y contacto maximal

**Definición 4.8.1.** Un punto de una curva se llama cuspidal si el cierre entero  $\bar{\mathcal{O}}$  del anillo local  $\mathcal{O}$  de la curva en el punto es un anillo local.

**Teorema 4.8.2.** Sea  $C$  una curva plana sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y  $x \in C$  un punto cuspidal. Existe un número natural  $c_x > 0$ , llamado contacto maximal con la curva  $C$  en la cúspide  $x$ , con las siguientes propiedades:

1. La multiplicidad de intersección en  $x$  de la curva con otra curva regular en  $x$ , no excede al contacto maximal, i.e.,  $(C \cap C')_x \leq c_x$ .
2. La igualdad se verifica si y sólo si  $(C \cap C')_x$  no es múltiplo de la multiplicidad  $r$  de la curva en  $x$ .

*Demostración.* Como el anillo de la explosión  $\mathcal{O}_1$  es local, y la multiplicidad de  $\mathcal{O}$  en  $x$  es la multiplicidad de intersección de la fibra excepcional con  $\mathcal{O}_1$ , tenemos que la multiplicidad de  $\mathcal{O}$  es mayor

estrictamente que la de  $\mathcal{O}_1$  si y sólo si la fibra excepcional es tangente a la explosión de la curva (en  $x$ ).

Así pues, si  $\mathcal{O}_n$  es el primer anillo de la cadena de dilataciones, cuya multiplicidad  $r'$  es menor estrictamente que la de  $\mathcal{O}$ , se tienen dos posibilidades:

1. Para algún  $i \leq n$ , las explosiones  $i$ -ésimas  $C_i$  y  $C'_i$  de  $C$  y  $C'$  no se cortan. En este caso,  $(C \cap C')_x = l \cdot r$ , siendo  $l$  el primero de tales índices.
2. En otro caso,  $(C \cap C')_x = n \cdot r + (C_n \cap C'_n)_x$ . Ahora bien,  $C_n$  es tangente a la fibra excepcional, pues la multiplicidad ha descendido. Por otra parte,  $C'_n$  no puede ser tangente a la fibra excepcional, pues  $C'_{n-1}$  es regular (porque  $C'$  es regular) y la multiplicidad no puede descender al explotar. En conclusión,  $C_n$  y  $C'_n$  son transversales y  $(C \cap C')_x = n \cdot r + r'$ .

Por último, sea  $C'$  aquella curva que al explotar  $n$ -veces es una curva  $C'_n$  regular en el punto considerado y corta transversalmente a  $C_n$  (existe).

Tenemos que  $C'$  es regular en  $x$ : la explosión de  $C'_{n-1}$ ,  $C'_n$  es transversal a la fibra excepcional, pues lo es a  $C_n$ , luego  $C'_{n-1}$  es regular. Por otra parte,  $C'_i$ , para  $i \leq n-1$  es tangente a  $C_i$ , luego transversales a las fibras excepcionales correspondientes. Por tanto,  $C'_i$  es regular.

Además  $(C \cap C')_x = n \cdot r + r'$ .

Con todo,  $n \cdot r + r'$  es el contacto maximal y verifica las propiedades exigidas.  $\square$

Sea  $\mathcal{O}$  el anillo local de una curva en un punto cuspidal de multiplicidad  $m$ . Supongamos que el cuerpo base es algebraicamente cerrado de característica cero.

Como  $\bar{\mathcal{O}}$  es local entonces  $\widehat{\bar{\mathcal{O}}} = k[[t]]$ , siendo  $t$  un parámetro de  $\mathcal{O}$ . Si  $f \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$  es transversal entonces  $m = l(\mathcal{O}/(f)) = l(\bar{\mathcal{O}}/(f)) = l(\widehat{\bar{\mathcal{O}}}/(f))$ . Por tanto,  $f = \lambda \cdot t^m$ , siendo  $\lambda$  una serie formal invertible. Por las hipótesis hechas sobre el cuerpo  $\lambda$  tiene raíz  $n$ -ésima  $\mu$  en  $\widehat{\bar{\mathcal{O}}} = k[[t]]$ . Si definimos  $\bar{t} = \mu \cdot t$  se verifica que  $\widehat{\bar{\mathcal{O}}} = k[[\bar{t}]]$  y  $f = \bar{t}^n$ . Así pues, todo elemento de  $\widehat{\bar{\mathcal{O}}}$  (y por tanto de  $\mathcal{O}$ ) admite un desarrollo en serie formal en  $\bar{t} = \sqrt[n]{f}$  conocido como desarrollo de Puiseux de dicho elemento.

En particular, si  $\mathcal{O} = k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$ , donde  $x_1 = 0$  es transversal a  $\text{Spec } \mathcal{O}$ , cada  $\bar{x}_i$  admite un desarrollo de Puiseux  $\bar{x}_i = \sum_{j \geq 0} a_j (\sqrt[n]{\bar{x}_1})^j$ , con  $a_j \in k$ .

### 4.8.1 Desingularización de curvas planas vía el contacto maximal

Para demostrar que las curvas desingularizan mediante un número finito de explosiones, el argumento principal ha sido la finitud del cierre entero. En este apartado vamos a demostrar, dada una curva plana, la existencia de curvas de “contacto maximal”. Es decir, dada una curva y un punto de ella, existe una curva regular, que pasa por el punto, con multiplicidad de corte con la curva dada, en el punto dado, máxima. Esta curva, verificará que pasa por el punto y los puntos de las sucesivas fibras excepcionales siempre que no bajen de multiplicidad. Como la multiplicidad de corte de dos curvas es finita (siempre que no tengan componentes comunes) obtendremos que la multiplicidad de una curva en un punto habrá de bajar después de un número finito de explosiones. Así podremos demostrar la desingularización de las curvas planas por un número finito de explosiones.

La razón fundamental de la introducción de este apartado es que las técnicas e ideas aquí desarrolladas para la desingularización de curvas planas serán básicamente las que utilizaremos más tarde para la desingularización de superficies.

En este apartado supondremos que  $k$  es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

**Lema 4.8.3.** Sea  $p(x, y) = 0$  una curva de multiplicidad  $m$  en un punto  $p$  y sea  $D: k[x, y] \rightarrow k[x, y]$  una derivación. Entonces la curva  $Dp(x, y) = 0$  tiene multiplicidad mayor o igual que  $m - 1$ .

*Demostración.* Denotemos  $C \equiv p(x, y) = 0$ ,  $m_p(C) = m$  si y sólo si  $p(x, y) \in \mathfrak{m}_p^m - \mathfrak{m}_p^{m+1}$ . Por tanto,  $p(x, y) = \sum f_{i_1} \cdots f_{i_m}$ , con  $f_{i_j} \in \mathfrak{m}_p$ . Así pues,  $Dp(x, y) = \sum f_{i_1} \cdots Df_{i_j} \cdots f_{i_m} \in \mathfrak{m}_p^{m-1}$ . Con lo que concluimos.  $\square$

*Observación 4.8.4.* El lema sigue siendo cierto para operadores diferenciales de orden 1, es decir, para  $D = h + D_0$ ,  $D(p) \stackrel{\text{def}}{=} h \cdot p + D_0p$  (con  $h \in k[x, y]$  y  $D_0$  derivación).

**Lema 4.8.5.** Con las notaciones anteriores, existe una derivación  $D$ , tal que  $Dp(x, y) = 0$  tiene multiplicidad  $m - 1$  en  $p$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $p$  es el origen de coordenadas, es decir,  $\mathfrak{m}_p = (x, y)$ . Escribamos  $p(x, y)$  como suma de polinomios homogéneos

$$p(x, y) = p_m(x, y) + p_{m+1}(x, y) + \cdots + p_n(x, y) \quad p_m(x, y) = \sum_{r=0}^m \lambda_r x^r y^{m-r}$$

Como  $m \geq 1$ , en la expresión de  $p_m(x, y)$ , parece  $x$  o  $y$ . Supongamos que aparece  $y$ , es decir,  $\lambda_r \neq 0$  para algún  $r \neq m$ . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y} p(x, y) = \sum_{r=0}^m (m-r) \lambda_r x^r y^{m-r-1} + \text{monomios de grado mayor o igual que } m$$

Como  $\sum_{r=0}^m (m-r) \lambda_r x^r y^{m-r-1} \neq 0$ , concluimos que  $Dp(x, y) = 0$  tiene multiplicidad  $m - 1$ .  $\square$

Denotemos  $A = k[x, y]$ . Sabemos que la explosión de  $\mathbb{A}_2 = \text{Spec } A$  en el origen, está recubierto por los abiertos afines  $\text{Spec } A[\frac{x}{t}, \frac{y}{t}]$ , con  $t = x, y$ . Denotemos  $\bar{A} = A[\frac{x}{t}, \frac{y}{t}]$ .

**Lema 4.8.6 (fundamental).** Sea  $D: A \rightarrow A$  un operador diferencial de orden 1. Existe un operador diferencial de orden 1  $\bar{D}: \bar{A} \rightarrow \bar{A}$  tal que para todo  $P \in A$  (de multiplicidad  $m$  en el origen) se verifica

$$\frac{DP}{t^{m-1}} = \bar{D}\left(\frac{P}{t^m}\right)$$

“La transformada propia de la derivada es la derivada de la transformada propia”.

*Demostración.* Todo operador diferencial de orden 1 es la suma de una homotecia y una derivación. Basta demostrar el lema para cuando  $D$  sea una homotecia y para cuando sea una derivación.

1. Sea  $D = h$  una homotecia, i.e.,  $DP = h \cdot P$ . Tomando  $\bar{D} = t \cdot h$  se cumple la igualdad requerida.
2. Sea  $D$  una derivación. Tenemos que

$$\frac{DP}{t^{m-1}} = (tD)\left(\frac{P}{t^m}\right) + (mDt)\left(\frac{P}{t^m}\right) = \bar{D}\left(\frac{P}{t^m}\right)$$

donde  $\bar{D} = m \cdot Dt + tD$ . Observemos que  $\bar{D}$  es un operador diferencial de orden 1 porque  $m \cdot Dt$  es una homotecia y  $tD$  es una derivación de  $A_t$  que deja estable a  $\bar{A}$ , pues  $\bar{D}(\frac{x}{t}) = Dx - \frac{x}{t}Dt$  y  $\bar{D}(\frac{y}{t}) = Dy - \frac{y}{t}Dt$ .

□

*Observación 4.8.7.* La fórmula del lema fundamental demuestra, directamente, para curvas planas, que la multiplicidad no aumenta después de una explosión: Si  $C$  es de multiplicidad 1 en  $p$ , entonces la curva explotada es isomorfa a  $C$  y no hay nada que decir. Si  $C \equiv P = 0$  es de multiplicidad  $m > 1$ , podemos suponer que  $DP$  es de multiplicidad  $m - 1$ , luego por inducción sobre la multiplicidad, podemos suponer que  $DP/t^{m-1}$  es de multiplicidad menor o igual que  $m - 1$  (en los puntos de la fibra excepcional). Por tanto,  $\bar{D}(P/t^m)$  es de multiplicidad menor o igual que  $m - 1$  (en los puntos de la fibra excepcional). Por los lemas anteriores,  $P/t^m$  es de multiplicidad menor o igual que  $m$  (en los puntos de la fibra excepcional).

**Definición 4.8.8.** Sea  $p \in C$  y  $C_r \rightarrow \dots \rightarrow C$  una sucesión de transformaciones cuadráticas. Los puntos de  $\pi^{-1}(p)$  se les llamará “puntos de la curva  $C$  infinitamente próximos” a  $p$ .

**Teorema 4.8.9 (de existencia de curvas de contacto maximal).** *Sea  $p$  un punto de multiplicidad  $m$  de una curva plana  $C$ . Existe una curva plana  $C'$  regular en  $p$  que pasa (sus transformadas propias) por todos los puntos de  $C$  infinitesimalmente próximos a  $p$  de multiplicidad  $m$ .*

*Demostración.* Vamos a proceder por inducción sobre la multiplicidad  $m$  de  $C \equiv P = 0$  en  $p$ .

Si  $m = 1$  la propia  $C$  es una curva de contacto maximal.

Supongamos que  $m > 1$ . Consideremos un operador diferencial  $D$  de orden 1 tal que  $DP = 0$  tenga multiplicidad  $m - 1$  en  $p$ . Por el lema fundamental todo punto de  $C$  infinitamente próximo a  $p$  de multiplicidad  $m$  es un punto de  $C' \equiv DP = 0$  infinitamente próximo a  $p$  de multiplicidad  $m - 1$ : Sigamos las notaciones del lema fundamental. La explosión de  $C \equiv P = 0$  en  $p$  tiene de ecuaciones  $P/t^m = 0$ , la explosión de  $\tilde{C} \equiv DP = 0$  en  $p$  tiene de ecuaciones  $DP/t^{m-1} = \bar{D}(P/t^m) = 0$ . Por tanto, si un punto de la explosión de  $C \equiv P = 0$  en  $p$  tiene multiplicidad  $m$ , éste será un punto de la explosión de  $\tilde{C} \equiv DP = 0$  en  $p$  de multiplicidad mayor o igual  $m - 1$ . Como la multiplicidad no aumenta después de una explosión, tendremos que si un punto de la explosión de  $C \equiv P = 0$  en  $p$  tiene multiplicidad  $m$ , éste será un punto de la explosión de  $\tilde{C} \equiv DP = 0$  en  $p$  de multiplicidad  $m - 1$ . Argumentando del mismo modo con las curvas explotadas  $P/t^m = 0$  y  $DP/t^{m-1} = \bar{D}(P/t^m) = 0$  concluimos.

Por hipótesis de inducción, existe una curva  $C'$  regular en  $p$  que pasa (sus transformadas propias) por todos los puntos infinitamente próximos a  $p \in \tilde{C} \equiv DP = 0$  de multiplicidad  $m - 1$ . Por tanto,  $C'$  pasa (sus transformadas propias) por todos los puntos de  $C$  infinitesimalmente próximos a  $p$  de multiplicidad  $m$ .

□

En caso de una rama analítica sabemos, por la subsección anterior, que la curva del teorema es la curva de máxima multiplicidad de intersección.

**Corolario 4.8.10.** *Toda curva plana reducida desingulariza mediante un número finito de transformaciones cuadráticas.*

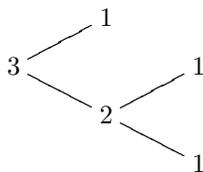
*Demostración.* Escribamos la ecuación de la curva  $0 = p_1 \cdots p_r$  (con  $p_i$  irreducibles y  $p_i \neq p_j$  cuando  $i \neq j$ , pues la curva es reducida). Explotando hasta separar las componentes, podemos suponer que la curva viene definida por los ceros de un polinomio  $P = 0$  irreducible.

Consideremos una curva  $P' = 0$ , regular en  $p$ , que pase por todos los puntos infinitesimalmente próximos a  $P = 0$ , de multiplicidad  $m$ . Como la multiplicidad de intersección de éstas dos curvas es finita, por 4.5.3, tenemos que después de un número finito de explosiones la multiplicidad de  $C$  ha de bajar estrictamente. Fácilmente concluimos.

□

## 4.9 Problemas

1. Probar que los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de  $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ , que contienen a  $\mathbb{C}$ , se corresponden con los puntos de la circunferencia en el plano proyectivo.
2. Probar que las  $\mathbb{C}$ -álgebras  $\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ ,  $\mathbb{C}[x]$  no son isomorfas aunque sí son birracionalmente isomorfas.
3. Calcular el cierre entero de  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ .
4. Desingularizar la curva  $y^2 - x^7 = 0$ . ¿Es esta curva birracional a la recta afín?
5. Calcular los anillos de valoración del cuerpo de fracciones de  $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3)$ , que contengan a  $\mathbb{C}$ .
6. Calcular la multiplicidad de intersección de  $y^2 - x^3 + y^4 = 0$  con  $yx + x^3 + y^3 = 0$  en el origen.
7. Definir una curva plana que pase por el origen cuyo árbol de explosión en el origen sea



8. Probar que el morfismo  $k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \hookrightarrow [k[x, \frac{y}{x}]/((\frac{y}{x})^2 - 1 + x)]_{\frac{y}{x}-1}$  no es un morfismo finito.
9. Sean  $X$  e  $Y$  dos  $k$ -variedades algebraicas y  $x \in X$  e  $y \in Y$  dos puntos racionales. Probar que

$$m_{(x,y)}(X \times_k Y) = m_x(X) \cdot m_y(Y)$$

10. Probar que las cúbicas proyectivas  $y^2 - x^3 - 1 = 0$  y  $y^2 - x^3 - 2 = 0$  se cortan en un único punto con multiplicidad 9.
11. Parametrizar la curva  $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$ . Calcular sus soluciones racionales.
12. Probar el Teorema de Pascal: Si un hexágono está inscrito en una cónica irreducible, entonces los lados opuestos se cortan en puntos alineados.
13. Probar el Teorema de Pappus: Sean  $R_1, R_2$  dos rectas;  $p_1, p_2, p_3 \in R_1$  y  $q_1, q_2, q_3 \in R_2$  (ninguno de ellos se encuentran sobre  $R_1 \cap R_2$ ). Sea  $R_{ij}$  la recta que une  $p_i$  y  $q_j$ . Probar que los puntos  $p_{ij} = R_{ij} \cap R_{ji}$  ( $i < j$ ) están alineados.
14. Ley de grupo en las cúbicas. Sea  $C$  una cúbica plana no singular. Fijemos un punto  $p_0 \in C$ . Dados dos puntos  $p, q \in C$ , la recta que pasa estos dos puntos, corta a  $C$  en un tercer punto  $r$ . Definamos  $\phi: C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto r$ . Probar que la aplicación  $C \times C \rightarrow C$ ,  $(p, q) \mapsto \phi(p_0, \phi(p, q))$  dota a  $C$  de estructura de grupo abeliano.
15. Sean  $C_3, C'_3$  dos cúbicas planas que se cortan en 9 puntos distintos, de manera que 6 de ellos están sobre una cónica. Probar que los tres restantes están alineados.

16. Demostrar que las tangentes a una cúbica irreducible plana en 3 puntos alineados cortan a la cúbica en otros 3 puntos alineados.
17. Demostrar que si un triángulo está inscrito en una cónica irreducible, entonces los puntos de corte de cada lado del triángulo con la tangente a la cónica en el vértice opuesto, están alineados.
18. Probar que una recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica plana irreducible pasa por un tercer punto de inflexión.
19. Probar que si una cúbica pasa por ocho de los nueve puntos distintos de corte de otras dos cúbicas, entonces también pasa por el noveno.
20. Sea  $C_3$  una cúbica plana y  $x \in C_3$  un punto de inflexión. Probar que los puntos  $y \in C_3$  para los que existe una cónica que que cumpla  $m_x(C_3 \cap C_2) = m_y(C_3 \cap C_2) = 3$ , son las terceras intersecciones de las rectas que unen los puntos de inflexión con  $x$ .
21. Teorema de Cayley-Bacharach: Sea  $C_{n+m-3}$  una curva plana de  $n+m-3$  que pasa por  $n \cdot m - 1$  de los puntos de intersección de dos curvas de grados  $n$  y  $m$ . Probar que  $C_{n+m-3}$  pasa por el punto restante.
22. Si una curva  $C_{n+m-\gamma}$  de grado  $n+m-\gamma$  ( $\gamma > 3$ ), pasa por  $n \cdot m - \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}$  de los  $n \cdot m$  puntos distintos en los que se cortan dos curvas de grados  $n$  y  $m$ , entonces pasa también por los restantes puntos siempre que dichos puntos no estén en una curva de grado  $\gamma - 3$ .
23. Si una cónica es tangente a una cúbica en tres puntos distintos, entonces los puntos de intersección restantes de la cúbica con las rectas que unen estos tres puntos están alineados.
24. Las tangentes en seis puntos de intersección distintos de una cúbica con una cónica cortan a la cúbica de nuevo en seis puntos de una cónica.
25. (a) Sea  $C$  la cúbica plana  $y^2 = x^2 + x^3$ . El haz de rectas  $y = tx$  define un morfismo birracional  $\mathbb{A}_1 \rightarrow C$ ,  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^3 - t$ . Calcular el área del “ojo del lazo” definido por la curva  $y^2 = x^2 + x^3$ .  
(b) Sea  $C$  la cúbica plana  $y^2 = x^3$ . El haz de rectas  $y = tx$  define un morfismo birracional  $\mathbb{A}_1 \rightarrow C$ ,  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ .
26. Probar que si una cónica tiene un punto singular entonces no es irreducible.
27. Probar que si una cúbica plana tiene dos puntos singulares entonces no es irreducible.
28. Probar que si una cuártica plana tiene cuatro puntos singulares entonces no es irreducible.
29. Probar que  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  son puntos singulares de la cuártica plana  $xy(x+y-2) - (x^2 + y^2 - 2x - 2y)^2 = 0$  ¿Existen más puntos singulares? Parametrizar esta cuártica (mediante un haz de cónicas).
30. Justificar por qué las circunferencias  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  han de ser tangentes en algún punto del infinito, sin hacer el cálculo explícito de sus tangentes en los puntos del infinito.
31. Calcular la multiplicidad de intersección de las cúbicas proyectivas planas  $y^2 - x^3 = 0$  con  $y^2 - x^3 - 1 = 0$ , en todos los puntos de intersección. Poner un ejemplo de dos cúbicas planas afines irreducibles, cuyos puntos de corte estén alineados.

- 
32. Sea  $s(x, y) \in k[[x, y]]$  tal que  $s(0, 0) = 0$  y  $s(x, y) \notin (x)$ . Probar que
- (a)  $k[[x]] \rightarrow k[[x, y]]/(s(x, y))$ ,  $t(x) \mapsto t(x)$  es un morfismo finito.
  - (b) Supongamos que  $s(x, y)$  es irreducible. El cierre entero de  $k[[x, y]]/(s(x, y)) = A$  en su cuerpo de fracciones es un  $A$ -módulo finito, que como anillo es isomorfo a un anillo de series formales en una variable.
33. Denotemos por  $\mathbb{C}((x))$  el cuerpo de fracciones de  $\mathbb{C}[[x]]$ . Probar que  $\mathbb{C}((\sqrt[n]{x})) := \varinjlim \mathbb{C}((\sqrt[n]{x}))$  es un cuerpo algebraicamente cerrado.

# Índice de Materias

- A*-álgebra finita, 7
- I*-filtración, 23
- Álgebra graduada, 60
- Árbol de explosión, 66
  
- Anillo íntegramente cerrado, 50
- Anillo de la explosión, 65
- Anillo de la transformación cuadrática, 65
- Anillo de Rees, 24, 63
- Anillo de valoración, 49
- Anillo de valoración discreta, 49
- Anillo graduado, 24
- Anillo local regular, 45
- Anillo noetheriano, 7
- Anillo normal, 50
  
- Cierre entero, 50
- Cohen-Seidenberg, 11
- Completación de un módulo, 19
- Cono tangente, 23
- Contacto maximal, 73
  
- Desarrollo de Puiseux, 74
- Dilatado de un módulo, 24
- Dimensión de Krull, 9, 38
- Dominio de Dedekind, 51
  
- Elemento algebraico, 8
- Elemento entero, 8
- Elementos algebraicamente independientes, 12
- Espacio noetheriano, 7
- Espectro proyectivo, 61
  
- Fibra excepcional, 66
- Filtración *I*-ádica, 23
- Filtración *I*-estable, 23
- Filtración de un módulo, 19
- Función de Hilbert, 36
- Función de Samuel, 36
  
- Graduado por una filtración, 21
  
- Ideal de valoración, 49
- Ideal homogéneo, 60
- Ideal irrelevante, 61
  
- Límite inductivo, 14
- Límite proyectivo, 17
- Lema de Krull, 26
- Lema de normalización de Noether, 12
- Longitud de un módulo, 34
  
- Módulo graduado, 24
- Módulo noetheriano, 6
- Módulo simple, 34
- Morfismo de explosión, 63
- Morfismo dominante, 52
- Morfismo finito, 7
- Multiplicidad de intersección, 69
- Multiplicidad en un punto, 66
  
- Polinomio de Hilbert, 36
- Polinomio de Samuel, 37
- Punto cuspidal, 73
- Punto no singular, 55
- Punto singular, 55
  
- Ramas analíticas, 72
  
- Serie de composición de módulos, 34
- Sistema de parámetros, 38
  
- Teorema de Artin-Rees, 24
- Teorema de Bézout, 70
- Teorema de Cohen, 28
- Teorema de los ceros de Hilbert, 13
- Teorema de Max Noether, 71
- Teorema de Pappus, 77
- Teorema de Pascal, 77

- 
- Teorema del ascenso, 10  
Teorema del ideal principal de Krull, 39, 41  
Teorema formal de la función inversa, 26  
Teorema fuerte de los ceros de Hilbert, 13  
Topología  $I$ -ádica, 23  
Transformación cuadrática, 63
- Valoración discreta, 48  
Variedad íntegra, 14  
Variedades catenarias, 41